Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

APLICACIONS DIDÀCTIQUES DEL PROBLEMA DE LA IL·LUMINACIÓ

Autora: Paula Arrebola Oya

Director: Jordi Font Gonzàlez
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica. UB

Barcelona, 27 de juny de 2018

Abstract

The Illumination Problem asks whether every region is illuminable from every point in the region and whether every region is illuminable from at least one point in the region. We will analise this problem and the proposed solutions. We will focuse on Roger Penrose's solution, which uses the properties of the choniques. We will also study the physics needed to understand the situation and its limitations in the real world. We will develope a series of activities, set on this context, suitable for Secondary level, which allow to work units from the inforce Catalonia's Curriculum and, simultaneously, show the lively nature of mathematics. This problem, which has progressed in the last few years, is capable of opening the door of creativity, curiosity, simulation, experimentation and emotion to the students.

Resum

El Problema de la Il·luminació pregunta si tota regió és il·luminable des de qualsevol punt i si per a tota regió existeix com a mínim un punt des del qual es pugui il·luminar la regió en la seva totalitat. Analitzarem aquest problema com també les solucions proposades. Ens centrarem en la solució proposada per Roger Penrose, la qual empra les propietats de les còniques. També estudiarem la física necessària per tal d'entendre la situació i les seves limitacions al món real. L'objectiu principal d'aquest projecte és desenvolupar un seguit d'activitats emmarcades en aquest context adaptades al nivell de Secundària, a partir de les quals s'abordin temes presents al Currículum vigent de Catalunya i, simultàniament, mostrin la matemàtica com una ciència viva. Aquest problema, que ha anat avançant en els últims anys, pot obrir la porta al món de la creativitat, la curiositat, la simulació, l'experimentació i l'emoció per part de l'alumnat.

2010 Mathematics Subject Classification. 01A01, 70A01, 78A01, 97A02, 97A06, 97G02, 97M02, 97U02

Agraïments

En primer lloc, vull donar les gràcies al Jordi Font, el meu tutor, per haver confiat en aquest projecte, per la seva vitalitat, suport i guia, pels magnífics consells i les oportunitats brindades i per mostrar-me el meravellòs món de la docència.

En segon lloc, al Sergi Múria, que junt amb el Jordi em van cautivar durant l'assignatura de Didàctica. A més, els recursos als quals m'ha donat accès, com també les visites al CESIRE han estat una peça clau en aquest projecte i ho he trobat molt enriquidor.

En tercer lloc, a l'Anton Aubanell, que em va robar el cor amb la seva passió i entusiasme des del primer dia que el vaig conèixer, em va recomenar el llibre de Dorfman i té unes obres fantàstiques.

En quart lloc, a l'Olga Bedós, la meva professora de matemàtiques, una font d'inspiració a la qual li tinc una gran estima i que em va obrir les portes de l'Institut Salas i Xandri.

En cinquè lloc, a l'Alba Castelltort i a l'Àngel Prado, per brindar-me la possibilitat de portar el problema de la il·luminació als seus centres.

En sisè lloc, en Julio, del CESIRE, que em va ensenyar parts de l'òptica més enllà del que jo m'hagués imaginat poder veure mai, i del qual vaig rebre un tracte excepcional.

En setè lloc, a la Marina, perquè em va contagiar el seu encant per la didàctica i em va recomenar el "Libro de la Física".

En vuitè lloc, a totes aquelles que m'han suportat parlar incansablement sobre el projecte, entre els quals als meus pares, al Gonzalo, a la meva familia, a l'Alaa i a la seva familia, al Jordi, a la Noelia.

Índex

1 Introducció

El projecte

El present treball parteix del problema de la Il·luminació, el qual sorgí al 1950. Per tant, tracta matemàtica recent, jove. D'aquest problema s'han plantejat diferents versions, algunes de les quals han quedat obertes més de 40 anys. De fet, ampliant el marc d'aquest problema, s'han dut a terme investigacions en els últims anys, de les quals se'n desprèn un article de Samuel Lelièvre, Thierry Monteil i Barak Weiss al 2016, a [11] que es basava, entre d'altres, en investigacions d'Alex Eskin, Maryam Mirzakhani i Amir Mohammadi.

Cal destacar que és significatiu que el fil conductor del projecte sigui el problema de la Il·luminació perquè ha quedat a l'ombra durant molt de temps. No s'ha estès massa, ni tampoc ha tingut una gran divulgació. De fet, en català i castellà, només es disposava de la Wikipedia com a font d'informació. Obrint les portes a l'anglès, es pot accedir a molt més material, però tot i així el ventall és prou acotat, sobretot a nivell divulgatiu.

Aquest treball és singular també per com està plantejat, atès que arrel d'aquest problema matemàtic es persegueix fer una proposta didàctica. Així doncs, té un enfocament molt fresc i innovador. No obstant, val a dir que, un cop iniciada la recerca, es comprova que aquesta idea potser no és tan revolucionària, ja que el propi matemàtic Victor Klee la va suggerir al 1971, a [1]. Ara bé, no es troba cap rastre de si algú ho ha posat en pràctica.

Un altre aspecte a remarcar és que s'ha fet una recerca rigorosa sobre el problema emprant, com es pot apreciar a la bibliografia, fonts d'informació en anglès, principalment articles originals. També s'han tingut com a referents obres d'eminències com Pere Puig Adam, Claudi Alsina, Miguel de Guzmán i Anton Aubanell.

És important fer palès que Geogebra ha estat un programa i una peça clau per tal de desenvolupar aquest projecte. De fet, amb aquesta eina s'han fet moltes construccions, les quals acompanyen al lector al llarg d'aquest treball. Fent ús de les possibilitats que brinda, permet desenvolupar la intuïció, fer exploracions dels diferents casos, facilita la visualització dels conceptes i les construccions i, a més, obre la porta a la reflexió més enllà. Tota aquesta tasca ha forçat l'adquisició d'una habilitat i agilitat amb el programa de la qual no disposava i resultarà molt útil per al meu futur com a docent.

Més punts a tenir en consideració és la creació d'un blog. Aquest pretén, d'una banda, esdevenir una font d'informació sobre el problema de la Il·luminació, abordant així la manca d'aquestes, ja comentada anteriorment. D'altra banda, persegueix ésser un recurs tant per a alumnes com per a professors, on es pugui accedir a activitats didàctiques diverses, riques, totes elles relacionades amb el problema de la Il·luminació. Addicionalment, al blog també tenen lloc altres recursos, més divulgatius o que poden ser font d'inspiració.

Seguint en la línia de la divulgació, una altra qüestió a comentar del projecte és la participació a la Matefest Infofest 2018. Per a aquesta jornada vaig preparar tot de material per dur a l'estand, el qual va tenir un fort impacte i va cridar molt l'atenció dels assistents. Em vaig encarregar de l'estand i vaig intentar incentivar l'interès, despertar la curiositat i l'emoció de tots aquells que s'hi apropaven alhora que fomentar que es conjecturi, s'argumenti i transmetre coneixements.

Addicionalment, cal fer èmfasi en el fet que l'Institut Vallès, de Sabadell, l'Institut Salas i Xandri, de Sant Quirze, i l'Institut Baix a Mar, de Vilanova, han confiat en aquest projecte i han facilitat que algunes d'aquestes activitats dissenyades en aquest treball s'hagin pogut dur a la pràctica. És notable que el caràcter divers d'aquesta proposta ha permès presentar-les en diferents cursos i, a més, no només en hores de matemàtiques.

Finalment, no es pot passar per alt el fet que les jornades de didàctica com SCM-FEEMCAT, ABEAM i la primera jornada Didàctica de la Facultat de Matemàtiques de la UB han jugat un rol essencial a l'hora d'inspirar-me no només en alguns aspectes concrets, sinó també en la metodologia i esperit que segueix el treball. També cal destacar el paper que ha tingut el CESIRE, el qual ha facilitat llibres i recursos manipulatius, s'ha fet la impressió 3D de diferents models de la cambra de Penrose i del qual he rebut un tracte excepcional.

Estructura de la Memòria

El fil conductor d'aquest treball és el Problema de la Il·luminació. Primerament es fa una breu explicació dels objectius que es persegueixen emprant el Problema de la Il·luminació en l'elaboració d'aquest projecte. Segonament, es donen unes pinzellades històriques sobre aquest problema. En tercer lloc, es tracten alguns conceptes i resultats físics i matemàtics, els quals s'usaran més endavant. Seguidament, es fa un anàlisi detingut dels diferents avenços del problema fins a l'aportació de Jeffrey Rauch. A continuació, es proposen un seguit d'activitats i experiències que han estat dissenyades expressament per tal de satisfer els objectius del treball. Més informació i material addicional relatiu a aquestes activitats es poden trobar als annexos. Per acabar, es fa un anàlisi de l'implementació de les activitats, de manera que s'avalua si s'han aconseguit assolir les fites plantejades inicialment. D'aquesta manera, la memòria adquireix una estructura de corba tancada.

2 Objectius

Aquest projecte persegueix els següents objectius:

1. Proposar activitats de tipus STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics), on Matemàtiques i Física van de la mà, i la comprensió d'una matèria ajuda a la comprensió de l'altra i viceversa.
2. Portar problemes de matemàtiques on l'experimentació i la simulació, tant física com computacional, tenen un paper essencial.
3. Dissenyar activitats que despertin la curiositat i puguin arribar a emocionar a l'alumnat.
4. Dur matemàtiques més actuals a l'aula.
5. Fer palesa la naturalesa viva de la Matemàtica. S'ha de comprendre que la Matemàtica és una ciència que encara s'està construint a dia d'avui.
6. Parlar del paper dels investigadors i investigadores matemàtiques, que són els que s'ocupen principalment d'aquests avenços. D'aquesta manera, a més, es dóna visibilitat a aquesta ocupació, la qual fora del món de les matemàtiques pot passar una mica desapercebuda.

3 Recorregut històric del Problema de la Il·luminació

Problema 3.1. Problema de la Il·luminació:
Si un imagina dues persones en una habitació a les fosques, assumint que les parets estàn recoberts de miralls, sigui quina sigui la geometria de la cambra:

- Sense importar on estiguin localitzades aquestes dues persones, podria una persona encendre un llumí i ser vist per l'altra després de repetides reflexions?
- Existeix alguna posició on pugui col·locar-se una persona i encendre un llumí i que la segona persona, independentment de la posició que prengui, pugui veure a la primera després de repetides reflexions?

L'autoria d'aquestes preguntes se li atribueix al matemàtic alemany-americà Ernst Straus, sobre principis de la dècada del 1950, tal com s'apunta a [2], [3] i [4].

La primera aparició d'un problema de característiques similars fou al 1958 a [5]. En aquest cas, es tracatava la primera pregunta. De fet, s'afirmava que la resposta a aquesta pregunta era negativa i es demanava la construcció d'un contraexemple en 2 dimensions imposant que aquest tingués la forma d'una corba tancada diferenciable. Addicionalment, es preguntava si aquest resultat es podia extendre a 3 dimensions. També val a dir que, en comptes de plantejar el problema usant la llum, s'expressava el problema en termes billarístics. Es veurà que el problema és equivalent en ambdós contextos a la subsecció 4.3.

El primer cop que es va plantejar el problema en un article fou, però, al 1969, de la mà del matemàtic nord-americà Victor Klee, a [2]. En aquest cas planteja el problema restringint-lo a una regió poligonal. Klee remarca el fet que el problema suggereix fer experiments i simulacions, alhora que denota que es poden donar dificultats en fer conjectures matemàtiques amb l'experimentació degut a complicacions tècniques i físiques. Finalment, també esmenta que aquest problema té versions que contemplen que la regió estigui delimitada per un nombre finit d'arcs diferenciables.

Aquest mateix matemàtic, al 1971, a [1], va proposar portar aquest problema a l'aula, amb estudiants d'institut. En aquell moment, el problema, en la versió poligonal, encara no estava resolt. Es tractava, doncs, de dur matemàtiques recents als estudiants, qüestions encara obertes que estaven ocupant a investigadors matemàtics d'aleshores. D'aquesta manera es pretenia, a més de despertar l'interés de les noves generacions, evidenciar la naturalesa viva, rica i evolutiva de la matemàtica, en contra de la concepció anquilosada que molta gent té al respecte.

El matemàtic i físic americà Jeffrey B. Rauch també va estudiar el problema de la Il·luminació i va publicar al 1978 un article, [7], en el qual estudiava, a partir de les propietats geomètriques de l'el·lipse i un argument elemental de compacitat, quantes fonts de llum es requereixen per il·luminar l'interior d'una regió afitada.

Al 1991, com bé apunten Croft, Falconer i Guy a [8], i Klee i Wagon a [9] el problema en la versió poligonal encara estava obert, després de quaranta anys. Haurien de passar encara quatre anys més fins que, al 1995, el matemàtic canadenc George Tokarsky publica a [3] un contraexemple, una cambra de 26 costats. Aquesta és tal que, de col·locar la font de llum en una posició determinada, queda tota la cambra il·luminada excepte per un sol punt. Tot i ser un sol punt, això ja prova la resposta negativa a la primera pregunta en el cas poligonal.

Aquest no és l'únic contraexemple, però. A tall d'exemple, l'estudiant David Castro va proposar-ne un altre a [10]. De fet, va fer una modificació del model de Tokarsky, simplificant la solució a una cambra de 24 costats.

Fins aquí s'hauria respost a la primera pregunta de Straus en el cas poligonal. Ara bé, vist que els contraexemples només contemplen que la regió no il·luminada té mesura zero, perquè és un conjunt finit de punts, sembla adient preguntar-se si tota cambra poligonal amb les parets reflectants es pot il·luminar de manera raonable. En un article, al 2016, Samuel Lelièvre, Thierry Monteil i Barak Weiss, a [11], afirmen i proven que en cambres que siguin superfícies de translació, independentment d'on es col·loqui el llum, només hi haurà un conjunt finit de punts no il·luminats. Una superfície de translació és una unió finita de polígons amb l'opció d'emparellar-los amb costats de la mateixa longitud. Una estructura com aquesta sorgeix de forma natural en estudiar els billars i s'empra per abordar el problema de la il·luminació matemàticament. Aquest enfoc es basa en el treball dels matemàtics Alex Eskin, Maryam Mirzakhani (l'única dona guardonada amb la medalla Fields a dia d'avui, la qual morí al juliol del passat 2017) i Amir Mohammadi. En el seu treball ofereixen una profunda comprensió de l'acció del grup de transformacions, anomenat el grup lineal especial: $SL2(Z)$.

Retornant al problema de la il·luminació, en termes més planers, segons el professor Howard Masur, a [12], professor a la Universitat de Chicago, i d'acord amb Agarwal, Shah i Venkataraman, a [13], les investigacions més recents determinen que si una cambra poligonal és tal que tots els seus angles són de la forma $\alpha = \frac{p}{q}\frac{\pi}{2}$, on $p, q \in \mathbb{N}$ aleshores, independentment d'on es col·loqui la font de llum, només hi haurà un conjunt finit de punts que no es podran il·luminar.

Després d'aquest tast d'història i prèviament a endinsar-se més en el problema, és adient aprofundir en certs conceptes i qüestions teòriques que es presenten a continuació. En primer lloc, es tractaren temes relatius a física. Posteriorment, de caire matemàtic.

4 Física

El Problema de la Il·luminació es pot contextualitzar en dos escenaris. En aquesta secció es para atenció a ambdues versions, partint primer de conceptes d'òptica i després de mecànica. Finalment, es veurà que ambdós escenaris són equivalents sota certes hipòtesis.

4.1 Òptica

A fi d'enfocar el problema des d'una perspectiva òptica, és adient primer aturar-se a estudiar alguns conceptes i resultats d'òptica geomètrica. Aquesta branca s'ocupa únicament de qüestions relacionades amb la propagació de la llum. El seu objectiu fonamental és determinar les trajectòries de l'energia radiant a travès dels diversos medis.

Definició 4.1. *Les trajectòries de l'energia radiant en la seva propagació constitueixen els raigs de llum.*

Notació 4.2. *Es denota per c la velocitat a la qual es propaga la llum en el buit. Segons el National Institute of Standards and Technology,*

$$c = 299792458ms^{-1}$$

Notació 4.3. *Es denota per v la velocitat a la qual es propaga la llum en un medi.*

Observació 4.4. La velocitat de la llum en el buit, c, és constant. Ara bé, la velocitat de la llum en un medi no necessàriament ha de ser constant; pot ser funció de la direcció o del punt del medi.

Definició 4.5. *Sigui v la velocitat a la qual es propaga la llum en un medi, es defineix l'índex de refracció, el qual es denota per n, com el quocient:*

$$n = \frac{c}{v} \tag{4.1}$$

Definició 4.6. *Si la velocitat de la llum en un medi material és igual en totes les direccions, es diu que aquest medi és isòtrop. En canvi, si la velocitat de la llum varia amb la direcció, s'anomena anisòtrop.*

Definició 4.7. *Si la velocitat de la llum és igual en tots els punts d'un medi material, es diu que aquest medi és homogeni. Per contra, si la velocitat de la llum varia d'uns punts a uns altres, però en cada un d'ells és independent de la direcció, es diu que el medi és heterogeni.*

Observació 4.8. Si un medi és isòtrop i homogeni, aleshores el seu índex de refracció és constant. En els medis anisòtrops l'índex de refracció varia amb la direcció, i en els medis heterogenis amb el punt del medi.

Exemples 4.9. Els vidres òptics són medis materials homogenis i isòtrops. L'atmosfera, en canvi, la qual varia l'índex de refracció amb l'altura, és un medi heterogeni. Els cristalls de substàncies que no cristal·litzen en el sistema regular són exemples de medis materials anisòtrops.

Definició 4.10. *Si un raig de llum recorre un espai s en un temps t en un medi homogeni i isòtrop d'índex de refracció n, el camí òptic $\mathcal{L}$ es defineix mitjançant la següent relació:*

$$\mathcal{L} = ns \tag{4.2}$$

Atès que el medi és homogeni i isòtrop, se satisfa que tant la velocitat a la qual es propaga la llum en el medi com l'índex de refracció són constants. A més, es verifica que $n = \frac{c}{v}$ *i que l'espai recorregut per la llum,* s*, és* $s = v \cdot t$*. En conseqüència,* (4.2) *es pot reescriure de la següent forma:*

$$\mathcal{L} = ns = \frac{c}{v}(v \cdot t) = c \cdot t \tag{4.3}$$

Si la trajectòria del raig de llum travessa diferents medis d'índexs $n_1, n_2, ...$*, i recorre en cadascun d'ells un espai* s_i*, el camí òptic es defineix com:*

$$\mathcal{L} = n_1 s_1 + n_2 s_2 + ... = \sum n_i s_i \tag{4.4}$$

Si el medi és heterogeni amb variació continua de l'índex, es descomposa la trajectòria, ℓ*, en elements infinitesimals* ds*, dins dels quals es pugui considerar l'índex de refracció constant, de manera que l'expressió del camí òptic entre dos punts* A *i* B *de la trajectòria s'obtindrà a travès de la següent integral*

$$\mathcal{L} = \int_A^B n ds \tag{4.5}$$

Pel que fa al conveni de signes, es considera sempre el camí òptic com positiu si es pren sobre la trajectòria en el sentit de propagació de la llum, i negatiu en cas contrari.

Postulat 4.11. ***Principi de Fermat***[2]*: La trajectòria d'un raig de llum que va d'un punt* A *a un punt* B *és aquella per la qual el camí òptic* $\mathcal{L}$ *és estacionari respecte a possibles variacions de la trajectòria. Això s'expressa matemàticament de la següent forma:*

$$\partial \mathcal{L} = \partial \int_A^B n(s) ds = 0 \tag{4.6}$$

A partir d'aquest principi es deriven a continuació alguns resultats en el cas de medis homogenis i isòtrops:

Teorema 4.12. *En un medi isòtrop i homogeni els raigs de llum segueixen trajectòries rectes.*[3]

Tal com s'ha definit abans, en un medi homogeni i isòtrop d'índex de refracció n*, el camí òptic per anar d'un punt* A *a un punt* B *es pot expressar de la següent manera:*

$$\mathcal{L} = n \cdot s$$

A més, pel principi de Fermat, se sap que la trajectòria del raig ha de ser estacionària respecte a possibles variacions d'aquesta. Això vol dir que el camí òptic serà un extremal, i. e., màxim o mínim. Com que l'índex de refracció n *és una constant, per minimitzar el camí òptic s'ha de minimitzar l'espai recorregut* s*. Seguidament es veurà que el camí més curt per anar d'un punt* A *a un punt* B *és el segment recte que els uneix, amb longitud la distància que els separa, i amb això quedarà provat el teorema.*

Proposició 4.13. *El camí més curt per anar d'un punt* A *a un punt* B *a l'espai* $\mathbb{R}^n$ *amb la distància euclidiana és el segment recte que els uneix, amb longitud la distància que els separa.*

[2] A Heró se li atribueix l'afirmació que la llum viatja seguint el camí geomètricament més curt, dins d'un mateix medi de propagació. Amb aquest enunciat s'estava avançant a Fermat en la idea d'aquest principi.

[3] El primer en enunciar que la llum viatja seguint una línia recta fou Euclides.

Demostració. [4]
Sigui $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ una corba paramètrica de classe $C^1([0,1])$ tal que $\gamma(0) = A$ i $\gamma(1) = B$. És clar que γ és un camí que uneix A i B. Per a cada partició $P = \{t_0 = 0, t_1, ..., t_k = 1\}$ de l'interval $[0,1]$ es construeix una aproximació a γ segons la poligonal que uneix els punts de la corba que són imatge dels de la partició. El conjunt de totes les particions que compleixen aquesta condició es denotarà per $\mathcal{P}^* = \{P \text{ partició de } [0,1] | P = \{t_0 = 0, t_1, ..., t_k = 1\}\}$. És evident que aquesta poligonal també és un camí que uneix A i B. La longitud d'aquesta poligonal és:

$$l(\gamma, P) = \sum_{i=1}^{k} ||\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|| \tag{4.7}$$

Cal notar que aquesta longitud és una aproximació de la longitud de la corba γ. A mesura que una partició es refina, la poligonal associada a la corba empra més punts de la corba i, per tant, és una millor aproximació d'aquesta. A continuació es mira quina és la tendència de les longituds de les poligonals si d'una partició P'' se'n considera una de més grollera P':

Siguin $P' = \{t_0, t_1, ..., t_{j-1}, t_{j+1}, ..., t_k\}$, $P'' = \{t_0, t_1, ..., t_{j-1}, t_j, t_{j+1}, ..., t_k\}$ dues particions de $[0,1]$. S'observa que $P' \subset P''$, és a dir, que P' és més grollera que P''. Les longituds de les poligonals associades a les particions són, respectivament:

$$l(\gamma, P') = \sum_{i=1}^{j-1} ||\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|| + ||\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_{j-1})|| + \sum_{i=j+2}^{k} ||\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})||$$

$$l(\gamma, P'') = \sum_{i=1}^{k} ||\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})||$$

Per la desigualtat triangular se sap que:

$$||\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_{j-1})|| \leq ||\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)|| + ||\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})||$$

D'aquí se'n desprèn que $l(\gamma, P') \leq l(\gamma, P'')$. Així doncs, s'acaba de provar que:

$$P' \subset P'' \Rightarrow l(\gamma, P') \leq l(\gamma, P'') \tag{4.8}$$

S'observa a més que $P_0 = \{0, 1\}$ és la partició més grollera de $\mathcal{P}^*$. Per tant, està continguda en la resta de particions, és a dir:

$$P_0 \subset P \ \ \forall P \in \mathcal{P}^* \tag{4.9}$$

Així doncs, amb (4.8) i (4.9), s'obté:

$$l(\gamma, P_0) \leq l(\gamma, P) \ \forall P \in \mathcal{P}^*$$

En altres paraules:

$$l(\gamma, P_0) = \min_{P \in \mathcal{P}^*} l(\gamma, P)$$

[4] Aquest resultat habitualment es demostra mitjançant càlcul variacional, emprant arguments similars als que es poden trobar en [20] o bé en [21]. Ara bé, tenint en consideració que el públic al qual m'adreçaré en un futur no disposarà de l'eina del càlcul variacional per resoldre aquesta qüestió, he considerat més adient construir un argument que es basa essencialment en la desigualtat triangular i en el fet que un camí qualsevol pot aproximar-se per una poligonal.

Per tant, la longitud del camí més curt és: $l(\gamma, P_0) = ||\gamma(1) - \gamma(0)|| = ||B - A||$. Conseqüentment, es conclou que el camí més curt per anar d'A a B és la poligonal amb partició P_0, que és efectivament el segment recte que uneix A i B i té longitud $d(A, B) = ||B - A||$. □

Definició 4.14. *La reflexió de la llum és un fenomen que succeeix quan un raig de llum incideix sobre una superfície i, en xocar amb aquesta, pateix un canvi de direcció.*

Sigui un raig de llum que viatja per un medi homogeni i isòtrop que surt del punt A i es reflecteix al punt P d'una superfície plana π abans d'arribar al punt B, situat a una distància horitzontal ℓ d'A. Sigui $h_1 = d(A, \pi)$ i $h_2 = d(A, \pi)$. Com que el medi és homogeni i isòtrop, la llum segueix una trajectòria rectilínia per anar d'A a P, i de P a B. Sense perdre generalitat, es pot considerar que la superfície plana és $\pi : z = 0$, i que les coordenades d'A i B són $A = (0, 0, h_1)$ i $B = (l, 0, h_2)$. El punt $P \in \pi$ on es produeix la reflexió tindrà coordenades $P = (x, y, 0)$. L'espai recorregut per la llum en realitzar el recorregut d'A a B passant per P és:

$$s(x, y) = d(A, P) + d(P, B) = ||\overrightarrow{AP}|| + ||\overrightarrow{PB}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + h_1^2} + \sqrt{(l - x)^2 + y^2 + h_2^2}$$

Pel Principi de Fermat, com que el medi és homogeni i isòtrop, i en conseqüència l'índex de refracció constant, és suficient derivar l'espai recorregut i trobar els punts estacionaris. D'una banda, es deriva respecte x i s'obté:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + h_1^2}} + \frac{-(l - x)}{\sqrt{(l - x)^2 + y^2 + h_2^2}}$$

S'iguala a zero:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + h_1^2}} = \frac{l - x}{\sqrt{(l - x)^2 + y^2 + h_2^2}} \tag{4.10}$$

D'altra banda, es deriva respecte y i es té:

$$\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + h_1^2}} + \frac{y}{\sqrt{(l - x)^2 + y^2 + h_2^2}}$$

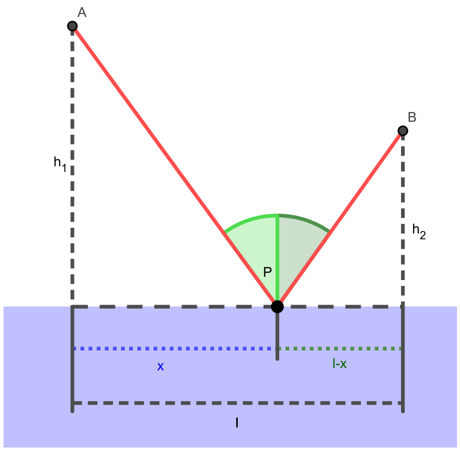
S'iguala a zero:

$$\frac{\partial s}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee \sqrt{x^2 + y^2 + h_1^2} = -\sqrt{(l - x)^2 + y^2 + h_2^2}$$

$\sqrt{x^2 + y^2 + h_1^2} = -\sqrt{(l - x)^2 + y^2 + h_2^2}$ *no és possible, tal com es demostra a continuació raonant per absurd. Se sap que* $\sqrt{x^2 + y^2 + h_1^2} \geq 0$ *i* $\sqrt{(l - x)^2 + y^2 + h_2^2} \geq 0$. *Si addicionalment se suposa que se satisfa* $\sqrt{x^2 + y^2 + h_1^2} = -\sqrt{(l - x)^2 + y^2 + h_2^2}$, *aleshoes això implica que* $\sqrt{x^2 + y^2 + h_1^2} = 0$ *i* $\sqrt{(l - x)^2 + y^2 + h_2^2} = 0$. *En conseqüència es tindria que $x = 0$, $l - x = 0$, $y = 0$, $h_1 = 0$ i $h_2 = 0$, però això no és possible perquè necessàriament $h_1, h_2 \neq 0$ per tal que A i B no pertanyin a la superfície π on es reflecteix el raig. Per tant, s'acaba d'arribar a una contradicció. D'aquí es desprèn que: $y = 0$. Se substitueix $y = 0$ a l'expressió 4.10 i s'obté:*

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} = \frac{l - x}{\sqrt{(l - x)^2 + h_2^2}} \tag{4.11}$$

L'esquema actual de la situació ara és el següent:



Es veu clarament, doncs, que la condició (4.11) *és equivalent a:*

$$\sin\theta_i = \sin\theta_r$$

Ara bé, com que $\theta_i, \theta_r \in (0, \frac{\pi}{2})$ *i la funció* sin *és injectiva en aquest interval, es té que:*

$$\theta_i = \theta_r \tag{4.12}$$

Fins aquí s'han provat la primera i la segona llei de la reflexió sota la hipòtesi que la superfície sobre la que es reflecteix és un pla i que els raigs van en línia recta. A continuació les enunciem:

Llei 4.15. ***Primera llei de la reflexió:***[5]
El raig incident, el raig reflectit i la normal es troben en el mateix pla.

Efectivament, ja que suposant que $A = (0, 0, h_1)$, $B = (l, 0, h_2)$ *i la superfície reflectant era* $\pi : z = 0$*, s'ha conclòs que el punt on es produeix la reflexió és* $P = (x, 0, 0)$*. Així doncs, el raig incident, el reflectit i la normal estan tots al mateix pla* $y = 0$.

Llei 4.16. ***Segona llei de la reflexió:***
L'angle d'incidència, format pel raig incident i la normal a la superfície reflectant, és igual a l'angle de reflexió, format pel raig reflectit i la normal ja mencionada.

En efecte, tal com s'ha vist a (4.12)

Aquestes lleis se satisfan també quan la superfície no és plana o els raigs no es propaguen en línia recta. Això es deu al fet que la reflexió és un fenomen local. En conseqüència, quan es parla de la reflexió, no cal considerar la superfície sobre la que es reflecteix la llum, sinó que n'hi ha prou amb un pla tangent, ja que a nivell local ja és una aproximació prou bona. De la mateixa manera, en un medi anisòtrop, on el camí que segueix la llum no és una recta, quan es produeix la reflexió, les trajectòries dels raigs es poden aproximar per línies rectes localment.

4.2 Mecànica

El problema de la Il·luminació també es pot expressar en termes billarístics, com ja s'ha esmentat anteriorment. En aquest cas, s'analitza la situació des de la vessant mecànica, la qual estudia el moviment i els conceptes relacionats amb la força i l'energia.

[5] Descartes va enunciar ambdues lleis en el segon discurs de la seva obra *Dioptrique*

Definició 4.17. *Un objecte es pot considerar una partícula puntual si no importa ni el tamany, ni la forma, ni el moviment intern de l'objecte.*

La descripció del moviment d'una partícula consisteix en saber la posició d'aquesta i com la posició varia amb el moviment de la partícula. Per tal de fer aquest anàlisi és convenient partir dels següents conceptes bàsics:

Definició 4.18. *El vector posició d'una partícula és un vector traçat des de l'origen d'un sistema de coordenades fins a la posició de la partícula, i es denota per* $\overrightarrow{r}$.

Definició 4.19. *Es denomina trajectòria al camí real seguit per la partícula. No s'ha de confondre amb el desplaçament, que és el canvi de posició de la partícula. Si a l'instant* t_1 *la partícula es troba al punt* P_1 *i el seu vector de posició és* $\overrightarrow{r_1}$ *i a l'instant* t_2 *la partícula s'ha mogut al punt* P_2 *i el vector posició és* $\overrightarrow{r_2}$*, es defineix el desplaçament com* $\Delta\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$.

Definició 4.20. *La velocitat mitjana es defineix com el quocient entre el desplaçament i l'interval de temps transcurregut. Per tant, sigui* $\Delta t = t_2 - t_1$*, el vector velocitat mitjana és*

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{\Delta\overrightarrow{r}}{\Delta t}$$

Definició 4.21. *El vector velocitat instantània es defineix com el límit del vector velocitat mitjana quan* Δt *tendeix a zero, i.e.:*

$$\overrightarrow{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{r}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$$

Definició 4.22. *Es defineix el vector acceleració mitjana com el quocient entre la variació del vector velocitat instatània* $\Delta\overrightarrow{v}$ *i l'interval de temps transcurregut* Δt*, i es denota per* $\overrightarrow{a_m}$:

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\Delta\overrightarrow{v}}{\Delta t}$$

Definició 4.23. *El vector acceleració instantània és el límit de l'acceleració mitjana quan l'interval de temps s'aproxima a zero, és a dir, és la derivada del vector velocitat instantània respecte el temps.*

$$\overrightarrow{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{v}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}$$

Havent definit aquests conceptes, el següent pas és estudiar perquè els objectes es posen en moviment i com és que canvien de velocitat i de direcció. Aquestes qüestions ja van ocupar a Sir Isaac Newton, el qual va néixer al 1642, any en què morí Galileu.

Definició 4.24. *La força es defineix com una interacció entre partícules. Tradicionalment es considera que n'hi ha de quatre tipus:*

- *Interacció gravitacional: Interacció de llarg abast entre partícules deguda a la seva massa. Es creu que la interacció gravitacional es deu a l'intercanvi d'unes partícules anomenades gravitons.*
- *Interacció electromagnètica: Interacció de llarg abast entre partícules carregades elèctricament incloent l'intercanvi de fotons.*

- *Força nuclear dèbil: Interacció d'abast extremadament curt entre partícules subnuclears incloent l'intercanvi o producció de bosons W i Z.* [6]

- *Força nuclear forta: Interacció de llarg abast entre hadrons, els quals consisteixen en quarks, que uneixen als protons i als neutrons per formar el nucli atòmic. Aquesta interacció inclou l'intercanvi de mesons entre els hadrons i de gluons entre els quarks.*

Una altra possible classificació és la següent:

- *Forces de contacte: són aquelles que, tal com indica el seu propi nom, són generades en estar dos cossos en contacte.*

- *Forces d'acció a distància: són aquelles que es donen sense contacte directe entre els cossos.*

Exemples 4.25. D'una banda, la força normal i la força de fricció són exemples de forces de contacte. La primera, la qual es denota per N, es defineix com la força que exerceix perpendicularment una superfície per estar en contacte amb un cos. La segona, la qual es denota per F_f, és la força que oposa una superfície de contacte al moviment, és paral·lela a aquesta superfície i té mòdul $F_f = \mu N$, on μ és el coeficient de fricció de la superfície. D'altra banda, la força gravitatòria és un clar exemple de força d'acció a distància. En particular, la força pes, la qual es denota per P, és la força amb què la Terra atrau als diferents cossos amb massa, i aquesta és igual a:

$$\overrightarrow{F_g} = m\overrightarrow{g} \qquad \text{on } g = 9,81N/kg \text{ prop de la superfície de la Terra}$$

Llei 4.26. *Primera llei de Newton, també anomenada llei de la inèrcia*[7]*:*
Tot cos en repós roman en repós si sobre ell no actuen forces externes. Un cos en moviment continua desplaçant-se amb velocitat constant si sobre ell no actua cap força externa.

Definició 4.27. *Si dues o més forces actuen simultàniament sobre un cos, el resultat és equivalent al produït per una sola força, igual a la suma vectorial de les forces individuals. El vector suma de les forces individuals es denomina força neta o força resultant, i es denota per*

$$\overrightarrow{F}_{neta} = \sum_i \overrightarrow{F_i}$$

Llei 4.28. *Segona llei de Newton:*
L'acceleració d'un cos és proporcional a la força neta que actua sobre ell, i inversament proporcional a la seva massa, és a dir,

$$\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{F}_{neta}}{m}, \qquad \text{on} \qquad \overrightarrow{F}_{neta} = \sum_i \overrightarrow{F_i} \tag{4.13}$$

L'equació (4.13) *freqüentment s'expressa com:*

$$\sum_i \overrightarrow{F_i} = m\overrightarrow{a} \tag{4.14}$$

[6] Les interaccions eletromagnètiques i les interaccions dèbils s'han unificat recentment sota la denominació d'interacció electrodèbil.

[7] Fou formulada com la llei de la inèrcia per Galileu

Llei 4.29. *Tercera llei de Newton :*
Si el cos A exerceix una força $\overrightarrow{F}_{AB}$ sobre el cos B, aleshores aquest exerceix una força igual però oposada $\overrightarrow{F}_{BA}$, sobre el cos A. És a dir:

$$\overrightarrow{F}_{BA} = -\overrightarrow{F}_{AB} \tag{4.15}$$

Definició 4.30. *El treball es defineix com la transferència d'energia mitjançant una força.*

Definició 4.31. *L'energia cinètica està associada al moviment d'una partícula. Es diu que una partícula de massa m que es mou amb velocitat $\overrightarrow{v}$ té una energia cinètica K:*

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

S'observa que l'energia cinètica depèn només del mòdul de la velocitat de la partícula i de la seva massa, però no de la direcció del moviment.

Definició 4.32. *L'energia cinètica d'un sistema de partícules és la suma de les energies cinètiques de les partícules individuals.*

Definició 4.33. *Es defineix el moment lineal o quantitat de moviment*[8] *com el producte de la velocitat d'una partícula per la seva massa i es denota per $\overrightarrow{p}$, i.e.:*

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v} \tag{4.16}$$

Definició 4.34. *El moment lineal total d'un sistema de partícules, el qual es denota per $\overrightarrow{P}_{sist}$, és la suma dels moments de les partícules individuals, és a dir:*

$$\overrightarrow{P}_{sist} = \sum_i \overrightarrow{p}_i = \sum m_i \overrightarrow{v}_i$$

Llei 4.35. *Conservació del moment:*
Si la força externa resultant sobre un sistema és zero, aleshores el moment lineal total del sistema roman constant.

Observació 4.36. La llei de conservació del moment és una relació vectorial, de manera que és vàlida component a component.

Definició 4.37. *Es defineix un xoc elàstic com una col·lisió tal que l'energia cinètica total del sistema és la mateixa abans i després del xoc. Si l'energia cinètica total no és la mateixa després de la col·lisió, es denomina xoc inelàstic.*

4.3 Contextos anàlegs

Fins aquí s'ha fet una immersió en les branques de l'òptica i la mecànica. A continuació, es veurà que el Problema de la Il·luminació plantejat en un escenari o altre és equivalent sota certes hipòtesis.

En termes lumínics, el problema diu així:

Pregunta 1: "Tota cambra amb les parets recobertes de miralls es pot il·luminar en la seva totalitat amb un únic llum que radia en totes les direccions, independentment d'on es col·loqui el llum, si es considera que el raig d'arribar a un vèrtex serà absorbit?"

[8] Newton va concebre la segona llei en termes de la quantitat de moviment

Pregunta 2: "Per a tota cambra amb les parets recobertes de miralls existirà sempre una ubicació on col·locar el llum que radia en totes les direccions de manera que no quedin regions fosques, si es considera que el raig d'arribar a un vèrtex serà absorbit?"

En aquest escenari, es considera que el medi que hi ha a la cambra és isòtrop i homogeni. Bé podria ser el buit, o l'aire; ambdós són supòsits molt raonables. En conseqüència, com s'ha provat a 4.12, això implica que la llum es propaga en línia recta. Addicionalment, vistes ja les lleis de la reflexió, se sap que el raig incident, el raig reflectit i la normal es troben en el mateix pla i que l'angle d'incidència, format pel raig incident i la normal a la superfície reflectant, és igual a l'angle de reflexió, format pel raig reflectit i la normal ja mencionada.

En termes billarístics, el problema diu el següent:

Pregunta 1: "Donada una taula de billar, es podria fer passar una bola per qualsevol regió independentment de l'ubicació de què parteix?"

Pregunta 2: "Per a tota taula de billar existirà sempre un punt on col·locar la bola de manera que es pugui fer arribar la bola a la resta de punts de la taula?"

Cal fer notar que se suposa que a cada vèrtex hi ha una obertura on, d'arribar la bola, aquesta es cola. També s'ha de remarcar que es pren el coeficient de fricció de la taula $\mu = 0$ *i que es fa una idealització considerant que la bola de billar és una partícula puntual.*

A l'hora d'estudiar la trajectòria d'aquesta partícula, es poden distingir dues situacions. D'una banda, cal considerar quan la bola rodola per la taula. En aquest cas la bola té una velocitat horitzontal cap a una direcció, i sobre ella actua la força pes, la força normal i la força de fricció, com es veu a la figura 1:

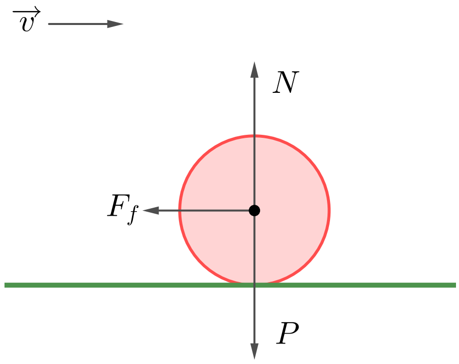


Figura 1: Creada amb Geogebra. Il·lustra l'anàlisi de forces.

En relació a la component vertical, la força resultant és igual a zero, atès que el pes i la normal tenen el mateix mòdul. Això es deu al fet que la bola exerceix una força F *sobre la taula, de mòdul el seu pes* P*, pel fet d'estar sobre ella i, en conseqüència, per la tercera llei de Newton, 4.29, la taula exerceix una força del mateix mòdul i sentit contrari,* N*, sobre la bola. Per tant, aplicant la segona llei de Newton, 4.28,* $a_y = \frac{dv_y}{dt} = 0$*. Es té, doncs, que* v_y *és constant, i com que inicialment és zero, ja que la bola té velocitat horitzontal,* $v_y = 0$*.*

Pel que fa a la component horitzontal, com que $\mu = 0 \Rightarrow \sum F_x = -F_f = -\mu N = 0$*. Això implica per la segona llei de Newton, 4.28, que* $a_x = 0$*, és a dir, la velocitat* v_x *és constant mentre la bola rodola, cosa que implica que la bola mentre rodola sobre la taula* *segueix una trajectòria recta.*

D'altra banda, s'ha d'analitzar el moment de la col·lisió, la qual es pren com un xoc elàstic. Es considera el sistema format per la taula de billar i la bola. Es denota per m_1 la massa de la bola i per v_1 i u_1 la seva velocitat abans i després del xoc respectivament. Anàlogament, m_2 denota la massa de la taula i v_2 i u_2 la seva velocitat abans i després de la col·lisió.

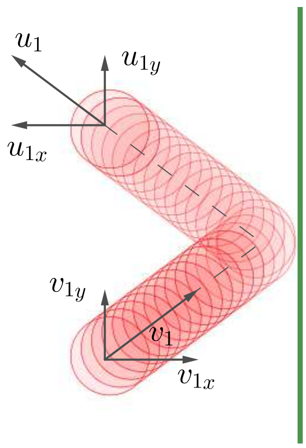


Figura 2: Creada amb Geogebra

S'observa que en produir-se el xoc, aquest té lloc en l'eix de les x. Això és degut al fet que la vora de la taula només pot alterar la component del moviment que coincideix amb la normal a la seva superfície. Per tant, la velocitat en l'eix de les ordenades no es veu afectat, i.e.

$$v_{1_y} = u_{1_y} \tag{4.17}$$

Com s'ha comentat prèviament, es tracta d'un xoc elàstic. Per tant, per definició, 4.37, l'energia cinètica es manté. És a dir:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \tag{4.18}$$

Atès que el mòdul de $\overrightarrow{v_1}$ és $v_1 = \sqrt{v_{1_x}^2 + v_{1_y}^2}$, i anàlogament amb $\overrightarrow{u_1}$ s'obté que:

$$\frac{1}{2}m_1(v_{1_x}^2 + v_{1_y}^2) + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1(u_{1_x}^2 + u_{1_y}^2) + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \tag{4.19}$$

Ara, fent ús de (4.17), *i tenint en compte que la taula no es mou en l'eix d'ordenades ni abans ni després de la col·lisió, de manera que es pot prendre $v_2 = v_{2_x}$ i $u_2 = u_{2_x}$,* (4.19) *és equivalent a:*

$$\frac{1}{2}m_1v_{1_x}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2_x}^2 = \frac{1}{2}m_1u_{1_x}^2 + \frac{1}{2}m_2u_{2_x}^2 \tag{4.20}$$

(4.20) *es pot expressar equivalentment de la següent forma:*

$$m_1(v_{1_x} - u_{1_x})(v_{1_x} + u_{1_x}) = m_2(u_{2_x} - v_{2_x})(u_{2_x} + v_{2_x}) \tag{4.21}$$

A més, se sap que, per la conservació del moment, 4.35, com que la força externa resultant sobre el sistema és zero, el moment lineal total del sistema roman constant, i.e.:

$$m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = m_1\overrightarrow{u_1} + m_2\overrightarrow{u_2} \tag{4.22}$$

En particular, interessa aquesta relació per la component de les x:

$$m_1 v_{1_x} + m_2 v_{2_x} = m_1 u_{1_x} + m_2 u_{2_x} \tag{4.23}$$

(4.23) *es pot reordenar de manera que:*

$$m_1(v_{1_x} - u_{1_x}) = m_2(u_{2_x} - v_{2_x}) \tag{4.24}$$

S'observa que $m_1(v_{1_x} - u_{1_x}) \neq 0$ ja que la massa de la bola serà estrictament positiva i necessàriament $v_{1_x} - u_{1_x} \neq 0$. De no ser així, voldria dir que $v_{1_x} = u_{1_x}$ i que, per tant, la bola mantindria la seva velocitat atravessant la vora del taula de billar. Així doncs, es pot dividir (4.21) *per* (4.24)*, obtenint:*

$$v_{1_x} + u_{1_x} = u_{2_x} + v_{2_x} \tag{4.25}$$

Arribats en aquest punt, és raonable considerar que $u_{2_x} + v_{2_x} \to 0$, ja que, basant-se en l'experiència, qualsevol persona que hagi jugat a billar acceptarà que no es pot apreciar que la taula es mogui ni abans ni després de la col·lisió amb la bola. Per tant es prendrà que $u_{2_x} + v_{2_x}$ és prou petit per afirmar que $v_{1_x} + u_{1_x} \approx 0$. Per conseqüent, s'obté que

$$u_{1_x} \approx -v_{1_x} \tag{4.26}$$

En altres paraules, la component x de la velocitat tindrà el mateix mòdul però sentit contrari.

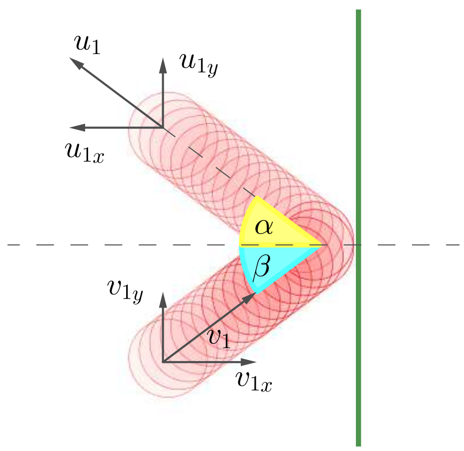


Figura 3: Creada amb Geogebra

Recuperant (4.17) *i* (4.26)*, s'obté $\left|\frac{u_{1_y}}{u_{1_x}}\right| \approx \left|\frac{v_{1_y}}{v_{1_x}}\right|$, que implica:*

$$\alpha = \arctan\left|\frac{u_{1_y}}{u_{1_x}}\right| \approx \arctan\left|\frac{v_{1_y}}{v_{1_x}}\right| = \beta \tag{4.27}$$

Després de tot aquest anàlisi es pot concloure que els contextos són anàlegs, atès que en ambdós casos:

- *les trajectòries són rectilínies a l'interior de la regió*
- *quan intercepten un vèrtex es finalitza el recorregut*
- *en arribar a la frontera, però no a un vèrtex, l'angle d'incidència és igual a l'angle de reflexió en el cas lumínic i aproximadament igual a l'angle de rebot en termes billarístics*

5 Matemàtiques

En aquesta secció es tracten algunes nocions geomètriques per tal d'establir una bona base per afrontar el problema. Més concretament, s'introdueixen les còniques i, en particular, es fa èmfasi en l'el·lipse, ja que és una peça clau en el disseny de la Cambra de Penrose, la qual respon al Problema de la Il·luminació.

Així doncs, al llarg d'aquest problema, es treballa en un espai afí euclidià $(\mathbb{A}, E)$. Per tant, es té un conjunt de punts, $\mathbb{A}$, i un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió finita n, E, dotat del producte escalar standard i una base ortonormal. S'acostumarà a prendre $n \in \{2, 3\}$, l'elecció dependrà de si s'està tractant el pla o l'espai. Cal recordar:

Definició 5.1. *La distància entre dos punts p, $q \in \mathbb{A}$ es defineix com:*

$$d(p, q) = ||\overrightarrow{pq}||$$

La funció distància definida tal com segueix:

$$d: \ \mathbb{A} \ \times \ \mathbb{A} \to \mathbb{R}$$

satisfà les propietats següents:

1. $d(p, q) \geq 0$ *i* $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$
2. $d(p, q) = d(q, p)$
3. $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$

Definició 5.2. *Dos vectors $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ es diu que són ortogonals si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$*

Teorema 5.3. ***Teorema de Pitàgores*** *Siguin $p, q, r \in \mathbb{A}$ tres punts linealment independents tals que $\overrightarrow{pq} \cdot \overrightarrow{qr} = 0$. Aleshores*

$$d(p, r)^2 = d(p, q)^2 + d(q, r)^2$$

Demostració. Es pren $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}$. Aleshores:

$$d(p, r)^2 = ||\overrightarrow{pr}||^2 = \overrightarrow{pr} \cdot \overrightarrow{pr} = (\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}) \cdot (\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}) =$$

$$= \overrightarrow{pq} \cdot \overrightarrow{pq} + 2\overrightarrow{pq} \cdot \overrightarrow{qr} + \overrightarrow{qr} \cdot \overrightarrow{qr}$$

Com que $\overrightarrow{pq} \cdot \overrightarrow{qr} = 0$, es té:

$$\overrightarrow{pq} \cdot \overrightarrow{pq} + 2\overrightarrow{pq} \cdot \overrightarrow{qr} + \overrightarrow{qr} \cdot \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pq} \cdot \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} \cdot \overrightarrow{qr} = d(p, q)^2 + d(q, r)^2$$

□

Definició 5.4. *Una esfera centrada en $p \in A$, i de radi $r > 0$ és el conjunt de punts que equidisten r de p, i.e. el conjunt de $q \in A$ tals que $d(p, q) = ||\overrightarrow{pq}|| = r$.*

Definició 5.5. *Una recta o un pla que té un punt, i només un únic punt, en comú amb l'esfera, es diu que és tangent a l'esfera.*

Proposició 5.6. *Sigui S una esfera centrada en O amb radi R. Si $r_Q : Q + < \overrightarrow{v} >$ és una recta tangent a S amb punt de tangència Q aleshores $d(Q, O) = R$ i els vectors $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{QO}$ són ortogonals.*

Demostració. Per hipòtesi es té que r_Q és una recta tangent a S amb punt de tangència Q. Això vol dir, per definició, que Q és l'únic punt que tenen en comú r_Q i S, i. e. $Q = r_Q \cap S$.

Del fet que $Q = r_Q \cap S$, es desprèn que $Q \in S = \{x \in \mathbb{R}^3 : d(x, O) = R\}$. En conseqüència, es té que $d(Q, O) = R$. Ara només queda veure que els vectors $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{QO}$ són ortogonals.

És palès que $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{QO}$ són linealment independents ja que, de no ser així, r_Q travessaria l'esfera i passaria per Q i $Q' \in S$ i això està en contradicció amb el fet que Q és l'únic punt en comú de la recta r_Q amb l'esfera S. Vist que $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{QO}$ són linealment independents, es pot prendre el pla $\pi : Q + < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{QO} >$. És immediat que $r_Q : Q + \overrightarrow{v} \subset \pi$. Això implica que $(r_Q \cap S) \subset \pi$. D'aquí se'n desprèn que $r_Q \cap S = r_Q \cap (S \cap \pi)$.

$S \cap \pi$ ens dóna un cercle màxim: $S \cap \pi = \{x \in \pi : d(O, x) = R\}$ Es vol provar que $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{QO}$ són ortogonals. Això és equivalent a veure que

$$\overrightarrow{QO} \in < \overrightarrow{v} >^{\perp} = \{\overrightarrow{x} \in E | \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{x} = 0 \; \forall w \in < v >\}$$

Això passa si, i només si, Q és la projecció ortogonal de O sobre r_Q. Per tant, raonant per absurd, se suposa que Q no és la projecció ortogonal de O sobre r_Q. Aleshores $\exists T \in r_Q$, $T \neq Q$, tal que T és la projecció ortogonal de O sobre r_Q. Per consegüent es té que:

$$d(O, r) = d(O, T) = \min_{P \in r_Q} \{d(O, P)\}$$

Ara bé, es tenia que $Q \in r$ i $d(Q, O) = R$, fet que té com a resultat que $d(O, T) \leq d(O, Q) = R$. Si $d(O, T) = R$, com que $T \in r_Q \subset \pi$, es tindria $T \in S \cap \pi = \{x \in \pi : d(O, x) = R\}$. Si $d(O, T) < R$, $\exists J \in r_Q, J \neq Q$ tal que $d(O, J) = R$, i.e., $J \in S \cap \pi$. En ambdós casos s'arriba a la conclusió que hi hauria més d'un punt de tangència en el cercle; cosa que a la vegada implicaria que hi hauria més d'un punt de tangència a l'esfera. Això, però, contradiu la hipòtesi que Q és l'únic punt de tangència de r_Q amb S. Consegüentment, queda provat el resultat. □

5.1 Seccions còniques

Definició 5.7. *El conjunt de totes les rectes, tangents a una esfera i que passen per un mateix punt P no pertanyent a l'esfera, forma una superfície anomenada* ***con****. Cada una d'aquestes rectes reben el nom de* ***generatriu*** *del con. El punt P es denomina* ***vèrtex*** *del con. La recta que passa pel vèrtex del con i pel centre de l'esfera és l'****eix de rotació del con****.*

Definició 5.8. *Cada secció plana del con s'anomena* ***secció cònica****. Els plans que passen per un vèrtex del con creen tres tipus de seccions: un punt, una recta o un parell de rectes. En el primer cas, el pla talla totes les generatrius del con. La secció paral·lela té forma corba tancada, més o menys allargada en funció de la pendent del pla amb l'eix del con. Aquesta secció s'anomena* ***el·lipse****. En el segon cas, el pla talla totes les generatrius excepte una d'elles. Al llarg d'aquesta generatriu el pla és tangent al con. La secció paral·lela és una corba infinita anomenada* ***paràbola****. Finalment, en el tercer cas, el pla talla totes les generatrius excepte dues d'elles. La secció paral·lela consta de dues branques infinites, una a cada "falda" del con. Aquesta secció es denomina* ***hipèrbola****.*

Teorema 5.9. *Si r_A i r_B són dues tangents a una esfera, amb punts de tangència A i B respectivament, traçades d'un mateix punt P, aleshores els segments d'aquestes tangents des del punt comú P fins als punts de tangència A i B seran iguals.*

Demostració. Com que la longitud dels segments que van de P fins als punts de tangència A i B són, respectivament, $d(A,P)$ i $d(B,P)$, només cal provar:

$$d(A,P) = d(B,P)$$

Prenem com a expressions de r_A i r_B:

$$r_A : A + < \overrightarrow{AP} >$$

$$r_B : B + < \overrightarrow{BP} >$$

Atès que r_A és una recta tangent a S amb punt de tangència A, s'extreu que $d(O,A) = R$ i $\overrightarrow{AP}$ i $\overrightarrow{OA}$ són ortogonals, i.e., $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$. Anàlogament, com que r_B és una recta tangent a S amb punt de tangència B, es té que $d(O,B) = R$ i $\overrightarrow{BP}$ i $\overrightarrow{OB}$ són ortogonals, i.e., $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$. Ara, aplicant el teorema de Pitàgores, s'obté:

$$d(O,P)^2 = d(O,A)^2 + d(A,P)^2$$

$$d(O,P)^2 = d(O,B)^2 + d(B,P)^2$$

Atès que $d(O,A) = R = d(O,B)$, s'obté que $d(A,P)^2 = d(B,P)^2$. Aleshores, com que la distància sempre és positiva, $d(A,P) = d(B,P)$. □

Teorema 5.10. *Si α i β són dos plans que es tallen segons una recta, c, i que són tangents a una esfera S en els punts A i B, els segments de les tangents traçats des de qualsevol punt de la recta c fins als punts A i B, formaran angles iguals amb la recta c.*

Abans de demostrar aquest teorema provarem alguns resultats previs:

Proposició 5.11.

$$\forall P \in c = \alpha \cap \beta \;\; d(P,A) = d(P,B) \tag{5.1}$$

Demostració. Sigui S una esfera centrada en O i de radi R. És palès que el pla α tangent a S en A és el pla perpendicular a la recta que uneix A i O que passa per A, és a dir, és el conjunt de totes les tangents a S amb punt de tangència A. Això es pot expressar de la següent forma: $\alpha = \{r_A \text{ tangent a } S \text{ en } A\}$. Anàlogament, el pla β és el conjunt de totes les tangents a S amb punt de tangència B, o equivalentment, $\beta = \{r_B \text{ tangent a } S \text{ en } B\}$.
Sigui $P \in c$ un punt qualsevol. Atès que $c = \alpha \cap \beta$ i $P \in c$, aleshores $P \in \alpha$ i $P \in \beta$.
$P \in \alpha$ i $\alpha = \{r_A \text{ tangent a } S \text{ en } A\} \Rightarrow \exists\, r'_A$ recta tangent a S en A t. q. $P \in r'_A$. De la mateixa manera, $P \in \beta$ i $\beta = \{r_B \text{ tangent a } S \text{ en } B\} \Rightarrow \exists\, r'_B$ recta tangent a S en B tal que $P \in r'_B$. Aleshores, com que $P \in r'_A \wedge P \in r'_B$, es té que $P \in r'_A \cap r'_B$, on r'_A i r'_B són dues tangents a l'esfera S amb punts de tangència A i B respectivament. S'observa que es compleixen les hipòtesis del teorema 5.9 i, aplicant-lo, s'obté que $d(P,A) = d(P,B)$.
q.e.d

$$d(A,c) = \min_{P \in c} d(A,P) = d(A,P') \text{ per algun } P' \in c$$

$$d(B,c) = \min_{P \in c} d(B,P) = d(B,P'') \text{ per algun } P'' \in c$$

Com que $\forall P \in c \; d(P, A) = d(P, B)$, és evident que

$$d(A, c) = \min_{P \in c} d(A, P) = \min_{P \in c} d(B, P) = d(B, c)$$

i que, per tant, existeixen $P', P'' \in c$ tals que $d(P', A) = d(P'', B)$. A més, per 5.1: $d(P', A) = d(P', B)$ i $d(P'', A) = d(P'', B)$. $\square$

5.2 Propietats òptiques de les còniques

Una secció cònica que no passa pel vèrtex d'un con es pot considerar com la projecció d'una circumferència en el pla secant. S'observa que les rectes projectants coincideixen amb les generatrius. El pla de l'el·lipse, π_e, i el pla tangent al con al llarg de la generatriu PM, π_t es tallen en la recta $t = T_1T_2$. Aquesta recta és la projecció de la tangent a la circumferència i es denomina tangent a l'el·lipse. A continuació es mostra que els radis vectors focals formen angles iguals amb la tangent T_1T_2 en el punt M.

Demostració. D'una banda, és té que els plans π_e i π_t són tangents a l'esfera S_1 en F_1 i en N_1 respectivament i es tallen en la recta T_1T_2. Per tant, pel teorema 5.10 és immediat que

$$\angle F_1MT_1 = \angle T_1MN_1 \tag{5.2}$$

D'altra banda, els plans π_e i π_t són tangents a l'esfera S_2 en F_2 i en N_2 respectivament i es tallen en la recta T_1T_2. Per tant, novament, pel teorema 5.10 és immediat que

$$\angle F_2MT_2 = \angle T_2MN_2 \tag{5.3}$$

Ara bé, els angles $\angle T_1MN_1$ i $\angle T_2MN_2$ són iguals en tant que són oposats pel vèrtex. (caldria demostrar que els angles oposats per un vèrtex són iguals??). En conseqüència, per la commutativitat i la transitivitat de la igualtat, s'obté el resultat que es volia provar:

$$\angle F_1MT_1 = \angle F_2MT_2 \tag{5.4}$$

$\square$

Per veure la construcció es pot consultar el següent enllaç: `https://www.geogebra.org/m/dQnzu5Hw`

6 Desenvolupament del problema

A continuació es fa un recorregut exhaustiu del problema de la Il·luminació, fins a la contribució de Rauch. A la secció 3 i a la subsecció 4.3 ja s'havia enunciat el problema, tot i que en termes més informals. Seguidament es proposa un apropament més tècnic.

6.1 Plantejament del problema

Sigui Ω *un conjunt obert i simplement connex d'un espai euclidià. Donat un punt* p *d'* Ω *i una direcció* θ*, es denotarà per* $L(p,\theta)$ *el camí seguit per un raig de llum que surt de* p *en direcció* θ *i es reflecteix a la frontera d'*Ω*,* $\partial\Omega$*, seguint les lleis de la reflexió. S'observa que* $L(p,\theta)$ *és un camí lineal a trossos amb cantonades a la frontera* $\partial\Omega$*, on els segments fan angles iguals amb la recta tangent a* $\partial\Omega$ *en el punt on es produeix la reflexió. Es diu que la regió* Ω *és il·luminable des de* p *si una font de llum a* p *il·luminaria la regió completa, és a dir, si*

$$\Omega \subset \bigcup_{\theta} L(p,\theta)$$

Atès que les regions que es poden considerar no han de ser necessàriament diferenciables, es fa una hipòtesi addicional, que és que si un raig de llum arriba a un vèrtex, aleshores aquest és absorbit.

Arribats a aquest punt, un es pot preguntar:

- *Tota regió és il·luminable des de tots els seus punts?*
- *Tota regió és il·luminable des d'algun dels seus punts?*

D'entrada, es considerarà que la regió Ω *viu al pla euclidià. Això seria anàleg a considerar una taula de billar o bé una cambra, amb el terra pla, i.e. amb curvatura de Gauss i curvatura mitjana nul·les:* $K = 0$ *i* $H = 0$*, i les parets recobertes de miralls perpendiculars a la superfície del terra.*

S'observa que no s'imposa cap restricció sobre la frontera de la regió. Això implica que, en el context de la llum, les parets de l'habitació i, en termes billarístics, la taula poden tenir parts corbes.

6.2 Primera pregunta

La primera qüestió pregunta si tota regió és il·luminable des de tots els seus punts. Si la resposta és que sí, voldria dir que, es prengués la cambra que es prengués i fos on fos que s'ubiqués el llum, l'habitació no tindria regions fosques. En aquest cas, s'hauria de demostrar que fos quina fos la geometria de la cambra i independentment d'on es col·loqués el llum, l'habitació es podria il·luminar en la seva totalitat. En canvi, si la resposta és que no, significaria que no és cert que tota regió és il·luminable des de tots els seus punts, és a dir, que existiria una habitació tal que si es col·loca el llum en certa posició, aleshores no s'il·luminaria en la seva totalitat. En aquest cas, doncs, caldria trobar un contraexemple.

Al 1958, a [5], el Dr. Roger Penrose, matemàtic i físic relativista britànic, va proposar el següent contraexemple:

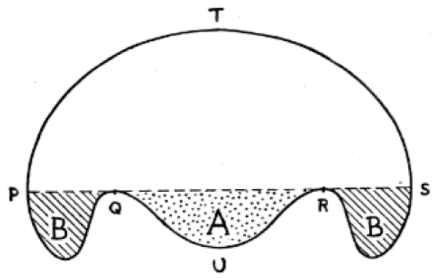


Figura 4: Extreta de [5]

Per tal de fer el disseny de la base d'aquesta habitació, es va proposar satisfer una condició addicional a les ja mencionades, que la forma fos una corba diferenciable. A continuació es procedirà a avaluar que, en efecte, es tracta d'un contraexemple que prova que la resposta a la primera pregunta és que no. En particular, es veurà que si el llum es posiciona a la regió B, aleshores no es pot il·luminar la cambra sencera. Més concretament, amb una font llumínica a $p \in B$, els raigs mai passaran per la regió A, en altres paraules, la regió A quedarà a les fosques. Per tal de demostrar-ho, es provarà el següent resultat:

Donada una figura com la següent, que consta de la meitat superior d'una el·lipse, i es completa amb una corba que connecta els dos focus amb un segment recte i forma dos lòbuls als extrems:

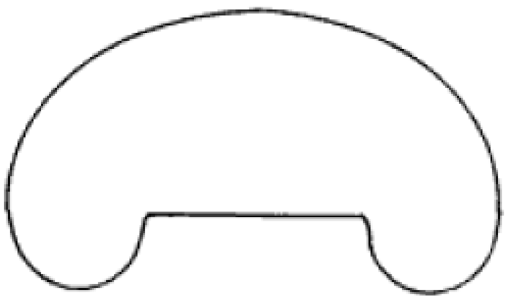


Figura 5: Extreta de [7]

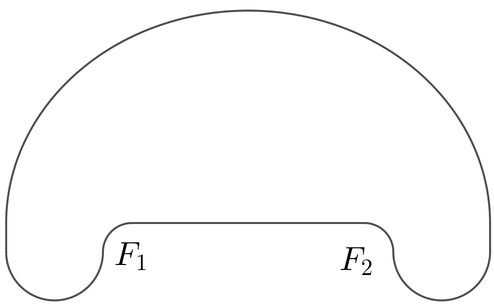


Figura 6: Creada amb Geogebra

Per tal de fer exploracions sobre la geometria de la cambra s'ha creat un geogebra al qual s'hi pot accedir a travès del següent link:
`https://www.geogebra.org/m/bghFq9Jm`

Si un raig que comença en el lòbul de l'esquerra (o de la dreta) mai passarà pel segment que connecta els focus.

Demostració. Per veure això, es considerarà la primera reflexió d'un raig que surti del lòbul. El cas en què el raig no surt del lòbul és trivial ja que, evidentment, de quedar-se en el lòbul, no passarà pel segment que connecta els focus. Es dibuixa amb una línia discontinua el raig que surt del focus esquerre i es reflecteix en el mateix punt de $\partial\Omega$ per comparar les trajectòries.

Tal com s'havia provat a la secció 5, a (5.4), i aplicant la segona llei de la reflexió, si un raig parteix d'un focus arriba a l'altre. Així doncs, tenint present la segona llei de la

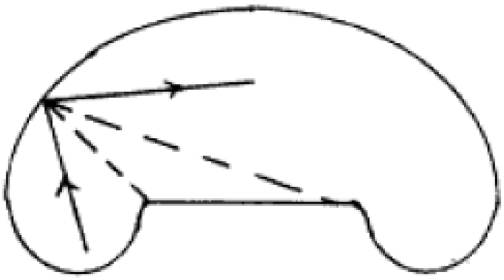


Figura 7: Extreta de [7]

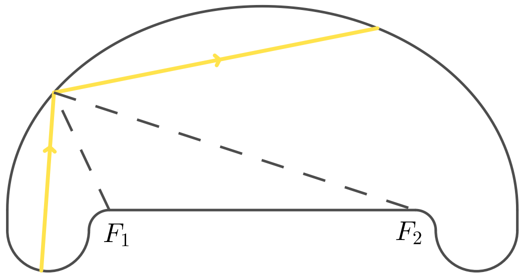


Figura 8: Creada amb Geogebra

reflexió, s'observa que el raig que comença al lòbul esquerra queda fora del raig discontinu que connecta els focus. Pot ser que no arribi directament al lòbul dret, però de no arribar es reflectarà a la semiel·lipse superior successivament fins a arribar-hi. A continuació es mostren un parell d'exemples:

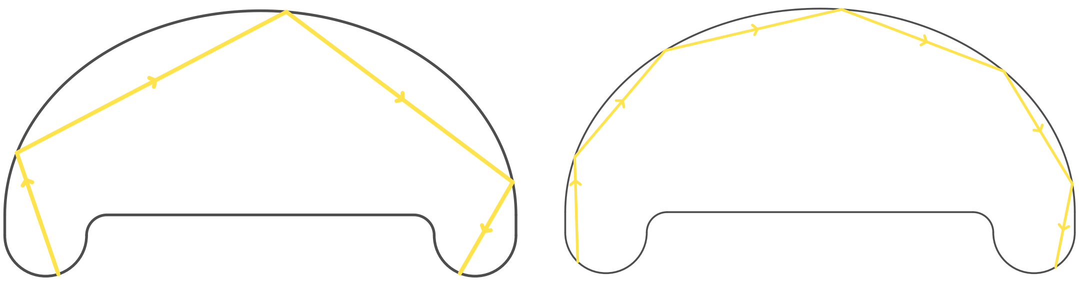


Figura 9: Creades amb Geogebra

Addicionalment es pot accedir al Geogebra on es poden fer més exploracions clicant al següent link: `https://www.geogebra.org/m/mD6zajnk`

La regió sota el raig amb línia discontinua queda "protegida". Un cop el raig és al lòbul dret, va rebotant. Si, eventualment, el raig escapa del lòbul dret, aleshores es repeteix l'argument en la direcció contrària i tot és anàleg per simetria. Es poden realitzar exploracions suplementàries accedint al geogebra d'aquest link: `https://www.geogebra.org/m/yne5r544`

És clar que si ara s'afegeix un clot sota la línia que uneix els focus, la regió que Penrose va anomenar A, com que pertany a la zona que esquiva la llum, no estarà il·luminada des de p si $p \in$ lòbul esquerre o dret. D'acord amb la notació de Penrose, $B =$ lòbul dret $\cup$ lòbul esquerre. Per tant, ja ha quedat provat que de posar el llum en $p \in B$, la regió A no quedarà il·luminada. Consegüentment, ja es té demostrat que la cambra que il·lustra la Figura 4 efectivament és un contraexemple. $\square$

6.3 Segona pregunta

La segona qüestió pregunta si tota regió és il·luminable des d'algun dels seus punts. Si la resposta és que sí, voldria dir que, es prengués la cambra que es prengués existiria com a mínim un punt tal que, si s'hi ubiqués el llum, l'habitació no tindria regions fosques. En aquest cas, s'hauria de demostrar que fos quina fos la geometria de la cambra, es *podria col·locar el llum en algun punt de manera que l'habitació es podria il·luminar en la seva totalitat. En canvi, si la resposta és que no, significaria que no és cert que per tota regió existeix un punt tal que si el llum es col·loca en aquella posició, aleshores la cambra queda totalment il·luminada. En altres paraules, que existiria una habitació per la qual no hi hagués cap punt des del qual es pogués il·luminar l'habitació en la seva totalitat. En aquest cas, doncs, caldria trobar un contraexemple, una cambra tal que fos on fos que es posés el llum, sempre quedessin regions fosques.*

D'acord amb Croft, Falconer i Guy a [8], a partir del contraexemple de Penrose proposat la Figura 4, foren diverses les versions que van sorgir de cambres no il·luminables des de cap dels seus punts. A continuació se'n presenten algunes:

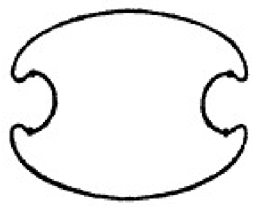


Figura 10:
Extreta de [6]

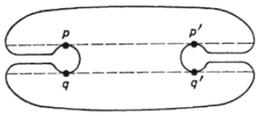


Figura 11:
Extreta de [1]

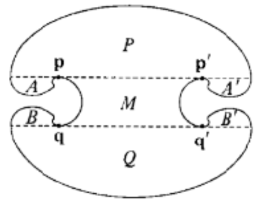


Figura 12:
Extreta de [8]

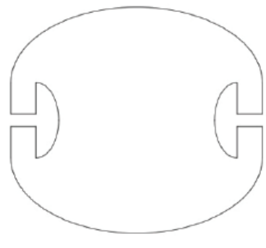


Figura 13:
Extreta de [13]

Segons Klee i Guy a [6], el contraexemple de la Figura 10 fou dissenyat independentment, i simultàniament en el temps, per Peter Ungar i Peter Kornya.[9] *Peter Ungar també és autor del disseny de la Figura 11 d'acord amb [1]. És destacable que el contraexemple més estès per la xarxa és el de la Figura 13, l'autoria del qual se li atribueix al Dr. R. Penrose.*

Un es podria preguntar com es passa del disseny de la Figura 4 a una construcció similar a les acabades d'esmentar. Parant atenció, s'observa que els dissenys no disten tant. Prenent el disseny original il·lustrat a 4, a sota una còpia d'aquest girada 180º, i aleshores connectant la part central del disseny original amb la part central de la còpia girada, s'obté una cambra similar a les de les Figures 10, 11, 12 i 13.

A continuació es detallarà com es componen les Figures 10, 11, 12 i 13. Amb aquest objectiu, és especialment molt il·lustrativa la Figura 12, de manera que s'emprarà la mateixa notació.

És palès que totes les cambres estan constituïdes per una semiel·lipse a la part superior i una altra a la part inferior, les quals es denotaran per P i Q respectivament. El segment entre focus de la semiel·lipse superior connecta amb el segment entre focus de la semiel·lipse inferior mitjançant una regió que es denotarà per M. Addicionalment, s'afegeixen uns lòbuls o concavitats als extrems més enllà dels focus: A, A', B i B'.

Resta veure que en efecte es tracta de cambres no il·luminables des de cap punt. Sigui Ω una qualsevol de les cambres, $\Omega = P \cup A \cup A' \cup M \cup Q \cup B \cup B'$. Es denotarà per F el punt on s'ubica la font de llum.

Pel que s'ha argumentat a la subsecció 6.2, ja se sap que si F es troba en un lòbul, aleshores el raig no atravessarà el segment que uneix els focus. En conseqüència:

[9] D'acord amb Klee i Guy això és conegut per correspondència escrita i no a travès de cap publicació.

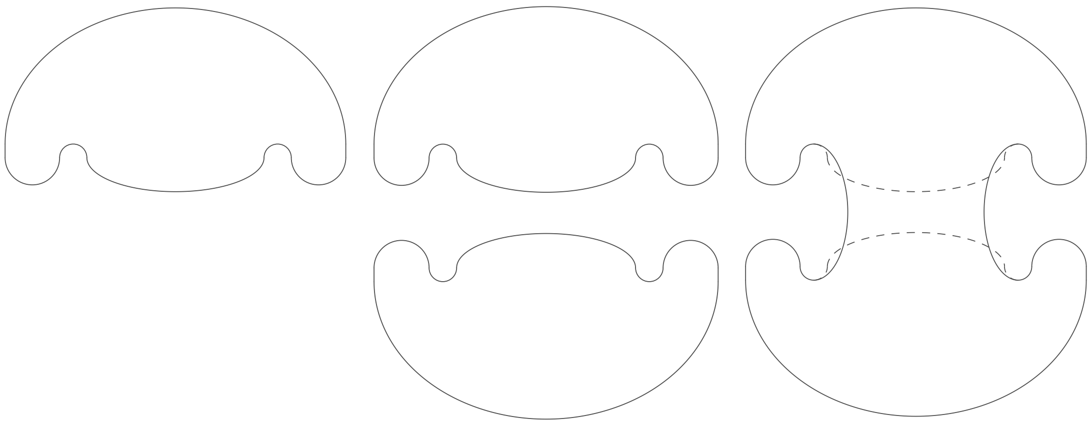


Figura 14: De la Figura 4 a una cambra no il·luminable des de cap punt.

- *si $F \in A$, aleshores M, Q, B i B' es quedarien a les fosques.*
- *si $F \in A'$, aleshores M, Q, B i B' es quedarien a les fosques.*
- *si $F \in B$, aleshores M, P, A i A' es quedarien a les fosques.*
- *si $F \in B'$, aleshores M, P, A i A' es quedarien a les fosques.*

Queda per discutir què succeeix si $F \in P \cup M \cup Q$. Abans, però, es provarà el següent resultat:

Donada una construcció com la de la Figura 6, si un raig travessa el segment que uneix els focus, mai arribarà a cap dels lòbuls.

Demostració. Tot raig que atravessi el segment que uneix els focus, interceptarà la frontera en la semiel·lipse en un punt, que es denotarà per T per comoditat. Es dibuixa amb una línia discontínua el raig que va de focus a focus i passa per T, i amb una línia puntejada de color rosa la normal a la frontera en T. Per la segona llei de la reflexió, per tal que l'angle d'incidència sigui igual a l'angle de reflexió, el raig reflectit estarà dins de la regió sota la línia discontínua.

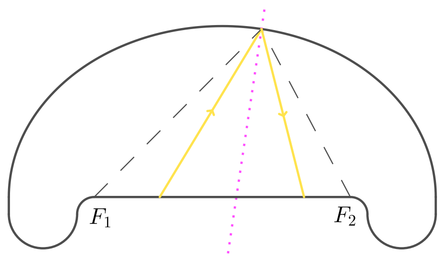


Figura 15: Creada amb Geogebra

Això implica que retorna al segment que uneix els focus, de manera que es té la situació inicial novament. Queda clar, doncs, que no passarà mai per cap dels lòbuls, i amb això queda demostrat l'enunciat. □

Per tal de fer exploracions es pot accedir al següent Geogebra: `https://www.geogebra.org/m/hwb5VT3W`

Amb aquest resultat provat, ara es pot avaluar què passa si $F \in P \cup M \cup Q$*:*

- *si* $F \in P$*, aleshores si un raig arriba a* Q *mai podrà passar per* B *ni per* B'*.*
- *si* $F \in M$*, aleshores si un raig arriba a* P *mai podrà passar per* A *ni per* A' *i si arriba a* Q*, mai podrà passar per* B *ni per* B'*.*
- *si* $F \in Q$*, aleshores si un raig arriba a* P *mai podrà passar per* A *ni per* A'*.*

En definitiva, recollint tota la informació, s'obté el que s'il·lustra a continuació:

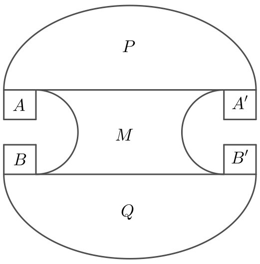


Figura 16: Regions cambra

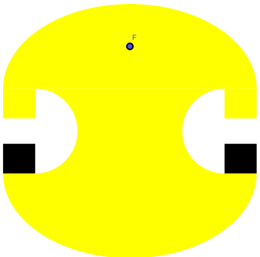


Figura 17: $F \in P$

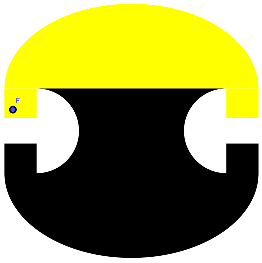


Figura 18: $F \in A$

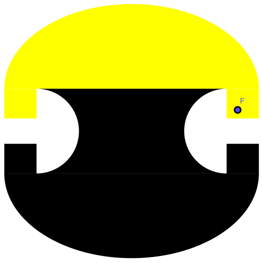


Figura 19: $F \in A'$

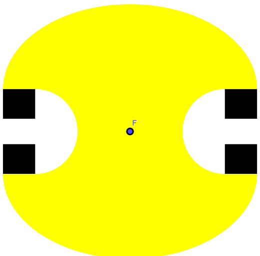


Figura 20: $F \in M$

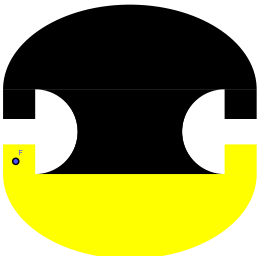


Figura 21: $F \in B$

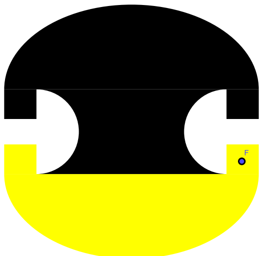


Figura 22: $F \in B'$

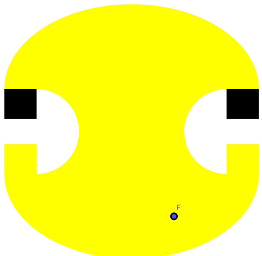


Figura 23: $F \in Q$

Es poden fer exploracions amb Geogebra accedint al següent link: `https://www.geogebra.org/m/XY3Bf2rQ`

6.4 Anant més enllà

Fins ara s'ha provat que existeixen cambres amb totes les parets recobertes per miralls per a les quals no n'hi ha prou amb una font de llum per tal d'il·luminar-les en la seva totalitat. Un es podria preguntar, doncs, si n'hi podria haver prou amb un conjunt finit de llums.

L'exemple de la Figura 10 és la unió de tres conjunts estrellats, de manera que amb tres fonts de llum segur que és suficient per il·luminar la cambra sencera. Ara bé, això no té perquè ser sempre així, com bé mostra la construcció que va descriure Jeffrey Rauch *a [7]. Si es té una figura generada pels següents blocs, cadascun d'ells compost per tres "bolets":*

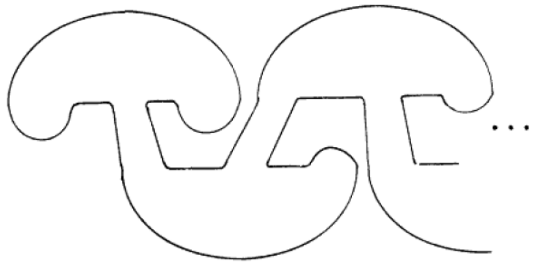


Figura 24: Bloc 1. Extreta de [7]

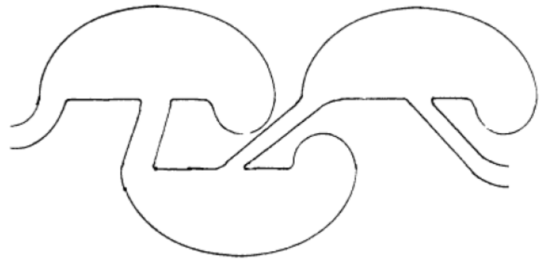


Figura 25: Bloc 2. Extreta de [7]

S'observa que un raig només pot desplaçar-se d'un bolet a un que tingui adjacent, i de fer-ho quedarà atrapat entre aquests dos bolets. En el cas general, un raig que es trobi a l'n-èsim bolet, només podrà anar al (n-1)-èsim o al (n+1)-èsim bolet, i d'aquí no en sortirà. Per tant, per tal d'il·luminar l'n-èsim bolet és necessària una font en algun dels tres bolets.

Tenint això present, es considera una regió construïda prenent un bloc com el de la Figura 24 de longitud L i s'hi connecta un bloc com el de la Figura 25 de longitud la meitat, i.e. $\frac{L}{2}$*. A continuació s'afegeix per la dreta un altre bloc com el de la Figura 25 amb longitud la meitat, i així successivament fins que el bloc de la Figura 25 col·lapsi en un punt. Es remarca que cada vegada que s'ha iterat l'operació s'ha fet que la longitud sigui la meitat de l'anterior. Per tant, la longitud de l'n-èsim bloc és:* $\frac{L}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Prèviament s'ha comentat que per il·luminar l'n-èsim bolet cal necessàriament una font de llum per cada 3 bolets, que és un bloc. En conseqüència, en tant que aquesta construcció té infinits blocs, caldran infinites fonts de llum.

Cal destacar, però, que tot i tenir infinits blocs, es tracta d'una regió acotada. D'una banda, és evident que l'alçada de la figura està acotada. D'altra banda, la longitud total de la regió és

$$\sum_{n=0}^{\infty} L\left(\frac{1}{2}\right)^n = L\frac{1}{1-1/2} = 2L$$

D'aquesta manera es comprova, per consegüent, que tenir una regió acotada no és condició suficient per afirmar que aquesta podrà il·luminar-se amb un conjunt finit de llums. La següent pregunta a fer-se és, doncs, quina seria una condició suficient. Rauch tracta també aquesta qüestió a [7] i dóna el següent resultat:

Una regió afitada Ω *que queda en un costat de la seva frontera* C^1 *és la unió finita de conjunts estrellats.* [10]

Demostració. $\forall p \in \Omega$ es pren un disc obert $D_p \subset \Omega$. Per $p \in \partial\Omega$ es pren un disc obert D_p tal que $D_p \cap \overline{\Omega}$ sigui estrellat. Això és possible atès que $\partial\Omega$ és C^1 i queda en un costat de la seva frontera, de manera que si el disc es pren amb un radi $\varepsilon > 0$ prou petit, aleshores $D(p,\varepsilon) \cap \overline{\Omega}$ es pot aproximar per la intersecció de $D(p,\varepsilon)$ i un semipla tancat.

[10] Aquest és un resultat més restrictiu que la condició que demanàvem, ja que dóna un criteri per establir quan un conjunt es pot il·luminar de manera directa amb un nombre finit de llums, sense necessitat de considerar les reflexions

Així s'obté $\{D_p \cap \overline{\Omega} | p \in \overline{\Omega}\}$ un recobriment de $\overline{\Omega}$ per oberts estrellats. Com que $\overline{\Omega}$ és tancat i afitat en $\mathbb{R}^2$, és compacte. Per tant, en tant que $\overline{\Omega}$ és compacte i $\{D_p \cap \overline{\Omega} | p \in \overline{\Omega}\}$ un recobriment de $\overline{\Omega}$, existeix un subrecobriment finit de conjunts estrellats. $\square$

Un es podria preguntar fins a quin punt és necessària la diferenciabilitat de $\partial\Omega$ per assegurar que Ω és il·luminable amb un conjunt finit de llums. Amb l'exemple que s'ha presentat abans, però, on $\partial\Omega$ era diferenciable a tot arreu amb excepció d'un sol punt p, s'havia vist que:

1. *Ω no és il·luminable des de cap conjunt finit de punts.*

2. *Cap raig que comença en Ω arriba a p.*

7 Didàctica

Fins aquí s'ha fet una immersió total en el problema i ja es disposen de suficients coneixements i eines per afrontar el repte de com portar-ho a secundària. En aquesta secció, primerament, es veurà perquè i com fer-ho, a través de les paraules de referents indiscutibles. Segonament, es presenten un seguit d'activitats emmarcades en el Problema de la Il·luminació, les quals han estat dissenyades precisament seguint aquestes línies i amb l'objectiu d'assolir les fites inicialment enunciades.

7.1 Antecedents didàctics

Pel que fa a perquè dur el Problema de la Il·luminació a les aules, en paraules de Victor Klee, a [1]:

> *"molts alumnes d'institut, estudiants de matemàtiques, no s'adonen que el coneixement matemàtic sempre està creixent. És a dir, conceben la matemàtica com una ciència anquilosada, "morta", mentre que tenen una vaga idea del progrès en la investigació en física, química, i biologia. Amb l'objectiu de difondre la naturalesa vital de la matemàtica, i despertar l'interès dels alumnes en la matèria, se'ls hauria de parlar de descobriments matemàtics recents i problemes encara no resolts als quals es dediquen investigadors matemàtics en l'actualitat. Això no és factible en moltes àrees de les matemàtiques, però és faedor en la geometria euclidiana."*

Seguidament, Klee fa referència a diferents problemes, com un de configuració de punts i línies, un de partició de rectangles i el problema de la Il·luminació. Certament, aquest últim ha avançat en els darrers anys, com ja s'ha exposat al recorregut històric, i tota la història relativa a aquest problema és recent. Per tant, és una oportunitat fantàstica per dur matemàtiques més actuals a l'aula i fer palesa la seva naturalesa viva.

També s'observa que en Klee afirma que la temàtica pot interessar als estudiants. Personalment coincideixo, però no només això, sinó que també cal valorar que obre la porta a parlar del problema de les galeries d'art i de les trajectòries en els billars, qüestions que de ben segur despertaran la curiositat de l'alumnat.

Un altre motiu per portar el problema de la Il·luminació a les aules és que dóna lloc a un enfoc interdisciplinar de la matèria manifestant així les connexions, sobre les quals el currículum vigent de Batxillerat de Catalunya diu el següent:

> *"cal tenir en compte qualsevol espai comú que puguem trobar amb altres matèries, atès que ens poden proporcionar els entorns d'aprenentatge propers i significatius que es necessiten per a l'activitat matemàtica de resolució de problemes, i les sinergies que es puguin generar impulsaran la millora de l'aprenentatge tant de la matemàtica com de l'altra matèria que ens forneixi l'entorn d'aprenentatge."*

En particular, és clara la connexió que existeix d'aquest problema amb la física, i és rellevant incidir-hi i familiaritzar-se amb el problema tal com es desprèn de les paraules de Miguel de Guzmán a Para pensar mejor, [23], a la pàgina 142:

"Antes de empezar a trabajar en una dirección determinada, familiarízate a fondo con el problema. (...) Asegúrate de que tienes una idea bien clara de los elementos que intervienen. Imagínatelos. Juega mentalmente con ellos, o mejor juega físicamente con ellos si los puedes materializar y manipular. Considera las conexiones que por su naturaleza tienen y las que te informan que tienen en ese caso particular."

Cal tenir present que, com expressa Guzmán a la mateixa obra a la pàgina 225:

"el conocimiento del campo específico en que un problema se coloca puede resultar una condición absolutamente esencial para poder pensar en tener acceso a la resolución de problemas."

Addicionalment, no es pot passar per alt el caràcter experimental que es pot dur a terme en relació amb el Problema de la Il·luminació, respecte el qual Guzmán afirma al mateix llibre a la pàgina 161:

"La experimentación, la observación, es una de las técnicas más fructíferas para el descubrimiento y la resolución de problemas. Resulta muy natural y fácil."

Per concloure, respecte a perquè dur aquest problema a l'aula, cal tenir present el que manifesta el currículum vigent de Catalunya:

"L'ensenyament de la matemàtica a través de la resolució de problemes situa l'estudiant en una posició sovint incòmoda que força la seva capacitat autònoma. Les estratègies heurístiques, que sovint no garanteixen efectivitat de resolució, permeten afrontar cada problema tot forçant el pensament crític i creatiu de l'alumnat. El tipus de raonament que generen aquestes estratègies serà d'utilitat per a l'alumne/a més enllà de l'aula de matemàtiques.
Tot i que el que s'accepta en matemàtiques és el que està provat, la matemàtica en el seu procés de gestació està formada per experiències, observacions i intuïcions que, en alguns casos, condueixen a descobriments plausibles. Contrastar aquests descobriments a través de l'estudi de casos concrets conduirà a modificar-los, rebutjar-los o acceptar-los. Posar a prova les conjectures descobertes i potser refutar-les és una activitat que facilita una correcta interpretació de l'error, forma part del procés de millora del raonament i educa el pensament crític dels nostres alumnes. La necessitat del rigor quedarà justificada quan l'alumne/a descobreixi i defensi, oralment i per escrit, conjectures que posteriorment ell mateix pugui refutar.
Aquest procés de gestació de la matemàtica ha de ser viscut per l'alumnat. Plantejar problemes, experimentar-los, comprendre'ls, establir plans de treball, descobrir invariants, conjecturar resultats, generalitzar casos observats, suggerir altres problemes anàlegs, reconèixer conceptes matemàtics de situacions concretes, errar i corregir per experimentar i conjecturar de nou fins a obtenir resultats plausibles, proposar solucions als problemes plantejats, cercar arguments per consolidar els resultats conjecturals, redactar les conclusions, exposar-les en públic, defensar-les i acceptar els suggeriments i les crítiques dels altres, són activitats pròpies d'una dinàmica de treball que fa de la matemàtica una matèria útil en la formació integral de tots els alumnes i necessària en el batxillerat com a etapa terminal per a una part de l'alumnat."

Havent justificat ja perquè portar el problema de la Il·luminació a secundària, queda plantejar-se com fer-ho. Tenint en compte el següent extret de la pàgina 7, de Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària, obra d'Anton Aubanell, és evident que no només cal fer èmfasi en el què sinó també en el com:

> *En paraules del professor Claudi Alsina: "Estimar les matemàtiques no és una lliçó d'un dia, no és una matèria psico-pedagògica, no és un curset especial. Estimar les matemàtiques és el valor afegit de fer matemàtiques jugant amb els sentiments nobles: combinar el cap i el cor. I fer-ho cada dia. Dit d'una manera més contundent: és tan important el "què" facin de matemàtiques com el "com" ho facin" (Claudi Alsina: Fer estimar les matemàtiques. Conferència d'inauguració del cicle itinerant de conferències organitzat pel Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya el curs 2001-2002).*

Un tret essencial a l'hora de posar-ho en pràctica ha estat plantejar continuament preguntes a l'alumnat, per tal d'anar modelant la seva forma de pensar. D'aquesta filosofia, George Polya, al prefaci de la primera edició de la seva obra Cómo plantear y resolver problemas, diu el següent:

> *"un professor de matemàtiques té una gran oportunitat. Si dedica el seu temps a exercitar als alumnes en operacions rutinàries, matarà en ells l'interès, impedirà el seu desenvolupament intelectual i acabarà desaprofitant la seva oportunitat. Si, pel contrari, posa a prova la curiositat dels alumnes plantejant-los problemes adequats als seus coneixements i els ajuda a resoldre'ls per mitjà de preguntes estimulants podrà despertar-los el gust pel pensament independent i donar-los certs recursos per això."*

Un altre aspecte fonamental ha estat apostar per la combinació i la diversificació de mitjans i experiències, tot i que particularment s'ha atorgat un valor essencial als objectes concrets, a les activitats pràctiques i a les TIC. Aquesta idea de fomentar el material manipulatiu entronca amb la manera de fer de la Maria Montessori, la Maria Antònia Canals, en George Polya, en Miguel de Guzmán, l'Anton Aubanell, entre molts d'altres. En paraules d'en Pere Puig Adam, en favor del material, al seu llibre El material didáctico matemático actual, afirma:

> *"...per a l'educador matemàtic, que no perd la perspectiva dels processos inicials d'abstracció, aquest material és molt més: representa quelcom substancial amb la seva funció educativa. Aquest material, estructurat en forma de models, té no sols la funció de traduir ocasionalment idees matemàtiques, sinó també d'originar-les, de suggerir-les."*

I en relació a les TIC, també anomenades TAC, Tecnologies per a l'Aprenentatge i el Coneixement, en un document escrit per la Rosa Fornell, a petició del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya, es diu el següent:

> *"L'escola del segle xxi no pot obviar que el seu alumnat utilitza correntment la tecnologia per a l'oci i la comunicació però que ha de ser guiat en l'adquisició de la competència digital en sentit ampli i en l'adquisició de coneixement. L'objectiu últim d'incorporar les tecnologies a l'escola ha de ser facilitar un aprenentatge més autònom i personalitzat de l'alumnat, la qual cosa requereix també uns rols diferents del professorat."*

7.2 Proposta d'activitats

A continuació es proposen un seguit d'activitats, les quals es presenten seguint el format de l'ARC, Aplicació de Recursos al Currículum, [29].

7.2.1 Versió simplificada del problema de la Il·luminació I

- ***Objectius:***
  El principal objectiu és guiar als alumnes perquè ells mateixos arribin a la noció de concavitat i convexitat. A més, aquesta activitat permet introduir el problema de la Il·luminació a les aules, fent palesa la naturalesa viva de la matemàtica, com també fer ús de materials manipulatius i simulacions virtuals.

- ***Descripció de l'activitat:***
  L'activitat està plantejada per seguir la següent estructura:

  Inicialment, es presenta el Problema de la Il·luminació a l'alumnat, donant algunes pinzellades històriques per despertar el seu interès i emfatitzar la naturalesa viva de la matemàtica.

  A continuació, es proposa abordar una simplificació del problema. Amb aquesta fi es tenen les fitxes, les quals són una guia pautant el procès autònomament, fent que els propis alumnes marquin el ritme de l'activitat, ajustant-se a la velocitat de cadascú. És recomenable que l'activitat es faci en parelles o petits grups, de manera que es puguin intercanviar raonaments. Un altre aspecte a destacar és el paper essencial de les TIC i de l'experimentació física il·luminant els models, ajudant així en el procès d'abstracció.

  És important que no només es discuteixi oralment a l'aula, sinó que també es deixi un registre per escrit i s'elaborin unes conclusions, per tal de sedimentar allò que s'ha après.

- ***Continguts, competències i processos que es treballen de forma destacada:***
  Pel que fa als continguts, es tracta principalment la noció de concavitat i de convexitat. A més, es fomenta l'anàlisi i identificació de característiques i propietats de figures geomètriques de dues dimensions i la visualització, el raonament matemàtic i la modelització geomètrica per resoldre problemes.
  En relació a les competències, es treballen de forma destacada les competències bàsiques de l'àmbit matemàtic C2, C3, C11 i C12.

- ***Alumnat a qui s'adreça especialment:***
  Alumnes de secundària

- ***Temporització:***
  1 hora

- ***Interdisciplinarietat, transversalitat i relacions amb l'entorn:***
  Aquesta activitat té una clara connexió amb física, ja que s'ha d'entendre com es propaga la llum per un medi com l'aire. Addicionalment, els models de cambres que s'usen al llarg de l'activitat poden construir-se en col·laboració amb l'àrea de tecnologia.

- ***Aspectes didàctics i metodològics:***
  Les qüestions es poden treballar en petits grups heterogenis per tal d'afavorir la participació i la reflexió entre l'alumnat. Per tant, l'avaluació hauria d'incloure aspectes com la implicació, el treball en equip i la quantitat i la qualitat de les aportacions.

  El paper del professor és estimular, acompanyar, plantejar preguntes en la direcció d'avenç i aconseguir que l'ambient de classe sigui l'apropiat.

- ***Recursos:***
  Geogebra
  Materials: Models físics, bombeta, làmpada, punter làser.

- ***Documents adjunts:***
  Fitxa per l'alumnat: A.1.1
  Fitxa pel docent: A.1.2

7.2.2 Versió simplificada del problema de la Il·luminació II

- ***Objectius:***
  El principal objectiu és guiar als alumnes perquè ells mateixos arribin a la noció de conjunt estrellat. A més, aquesta activitat permet introduir el problema de la Il·luminació a les aules, fent palesa la naturalesa viva de la matemàtica, com també fer ús de materials manipulatius i simulacions virtuals.

- ***Descripció de l'activitat:***
  L'activitat està plantejada per seguir la següent estructura:

  Inicialment, es presenta el Problema de la Il·luminació a l'alumnat, donant algunes pinzellades històriques per despertar el seu interès i emfatitzar la naturalesa viva de la matemàtica.

  A continuació, es proposa abordar una simplificació del problema. Amb aquesta fi es tenen les fitxes, les quals són una guia pautant el procès autònomament, fent que els propis alumnes marquin el ritme de l'activitat, ajustant-se a la velocitat de cadascú. És recomenable que l'activitat es faci en parelles o petits grups, de manera que es puguin intercanviar raonaments. Un altre aspecte a destacar és el paper essencial de les TIC i de l'experimentació física il·luminant els models, ajudant així en el procès d'abstracció.

  És important que no només es discuteixi oralment a l'aula, sinó que també es deixi un registre per escrit i s'elaborin unes conclusions, per tal de sedimentar allò que s'ha après.

- ***Continguts, competències i processos que es treballen de forma destacada:***
  Pel que fa als continguts, es fomenta l'anàlisi i identificació de característiques i propietats de figures geomètriques de dues dimensions i la visualització, el raonament matemàtic i la modelització geomètrica per resoldre problemes.

  En relació a les competències, es treballen de forma destacada les competències bàsiques de l'àmbit matemàtic C2, C3, C11 i C12.

- ***Alumnat a qui s'adreça especialment:***
  Alumnes de secundària

- ***Temporització:***
  1 hora

- ***Interdisciplinarietat, transversalitat i relacions amb l'entorn:***
  Aquesta activitat té una clara connexió amb física, ja que s'ha d'entendre com es propaga la llum per un medi com l'aire. Addicionalment, els models de cambres que s'usen al llarg de l'activitat poden construir-se en col·laboració amb l'àrea de tecnologia.

- ***Aspectes didàctics i metodològics:***
  Les qüestions es poden treballar en petits grups heterogenis per tal d'afavorir la participació i la reflexió entre l'alumnat. Per tant, l'avaluació hauria d'incloure aspectes com la implicació, el treball en equip i la quantitat i la qualitat de les aportacions.

  El paper del professor és estimular, acompanyar, plantejar preguntes en la direcció d'avenç i aconseguir que l'ambient de classe sigui l'apropiat.

- ***Recursos:***
  Geogebra
  Materials: Models físics, bombeta, làmpada, punter làser.

- ***Documents adjunts:***
  Fitxa per l'alumnat: A.2.1
  Fitxa pel docent: A.2.2

7.2.3 Estudi del comportament de la llum

- ***Objectius:***
  Es persegueix arribar a la segona llei de la reflexió fent un estudi estadístic del comportament de la llum en reflectir-se en una superfície plana. Les dades es prendran a través d'una experiència i permetran treballar les raons trigonomètriques, l'ús d'una base de dades en un full de càlcul i la inferència estadística.

- ***Descripció de l'activitat:***
  Els alumnes s'han d'agrupar en equips de 3 o 4 persones. Hauran d'anar seguint les indicacions de la fitxa. Bàsicament, el procediment és fer una presa de dades, tractar-les per tal d'obtenir les raons trigonomètriques, després generar una base de dades recol·lectant totes aquestes, de tot l'alumnat, no només les dels diferents equips, i a partir d'aquí fer l'estudi estadístic. Aquest es pot fer o bé amb els equips o bé amb tot el conjunt classe, en funció del temps i de la dinàmica de l'aula.

- ***Continguts, competències i processos que es treballen de forma destacada:***
  Pel que fa als continguts, es tracta des d'aspectes de la trigonometria com les raons trigonomètriques, qüestions de mesura com la precisió, l'exactitud i l'error i temes d'estadística com les eines d'anàlisi de dades, donant lloc a fer ús del full de càlcul i recursos digitals per a l'estadística i fer inferència i predicció.

  En relació a les competències, es treballen de forma destacada les competències bàsiques de l'àmbit matemàtic C2, C6, C7 i C12.

- ***Alumnat a qui s'adreça especialment:***
  4t d'ESO. També es poden fer adaptacions per cursos inferiors, però els continguts variarien.

- ***Temporització:***
  De 2 a 3 hores

- ***Interdisciplinarietat, transversalitat i relacions amb l'entorn:***
  En relació a les connexions internes, s'està relacionant la trigonometria amb l'estadística. Pel que fa a les connexions externes, és evident que l'activitat està intrínsecament relacionada amb la física, ja que estudia la segona llei de la reflexió.

- ***Aspectes didàctics i metodològics:***
  Les qüestions es poden treballar en petits grups heterogenis per tal d'afavorir la participació i la reflexió entre l'alumnat. Per tant, l'avaluació hauria d'incloure aspectes com la implicació, el treball en equip i la quantitat i la qualitat de les aportacions.

  El paper del professor és estimular, acompanyar, plantejar preguntes en la direcció d'avenç i aconseguir que l'ambient de classe sigui l'apropiat.

- ***Recursos:***
  Materials: punter làser, metres i mirall. Per tal de facilitar la presa de dades s'ha construït el model que es mostra a la figura, en el qual hi ha dos cintes mètriques, una a cada paret, i en una d'elles hi ha una cinta adhesiva amb efecte mirall per tal que es produeixi la reflexió.

- ***Documents adjunts:***
  Fitxa per l'alumnat: A.3.1
  Fitxa pel docent: A.3.2

7.2.4 Deducció de la segona llei de la reflexió

- ***Objectius:***
  El principal objectiu és guiar als alumnes perquè ells mateixos puguin arribar a deduir la segona llei de la reflexió a partir del Principi de Fermat i dues de les seves conseqüències: la primera llei de la reflexió i el fet que en un medi homogeni i isòtrop els raigs segueixen trajectòries rectilínies.

- ***Descripció de l'activitat:***
  Aquesta activitat es pot realitzar o bé individualment o bé en parelles. Principalment s'han de seguir els apartats que apareixen a la fitxa. Pot ser interessant introduir l'activitat per tothom i fer una conclusió final tots junts. També resulta engrescador que o bé al principi de la classe, per tal de despertar la curiositat i l'interès de l'alumnat, o bé al final, per posar la cirereta, fer una experiència en la qual s'observi la segona llei de la reflexió. També és recomenable que per tal de fer l'experiència participin els propis alumnes.

- ***Continguts, competències i processos que es treballen de forma destacada:***
  Pel que fa als continguts, es tracten la resolució de problemes geomètrics, el càlcul algebraic i les derivades.

  En quant a les competències generals, es treballen sobretot la personal i la interpersonal i la de coneixement i interacció amb el món. En relació a les específiques, es tracten sobretot la competència matemàtica i la competència en modelització matemàtica.

- ***Alumnat a qui s'adreça especialment:***
  Alumnes de Batxillerat.

- ***Temporització:***
  1 hora

- ***Interdisciplinarietat, transversalitat i relacions amb l'entorn:***
És clara la connexió que té amb física, més particularment amb l'òptica.

- ***Aspectes didàctics i metodològics:***
El paper del professor és estimular, acompanyar, plantejar preguntes en la direcció d'avenç i aconseguir que l'ambient de classe sigui l'apropiat.

- ***Recursos:***
La fitxa A.4.1.

  Opcionalment es pot dur un làser, un mirall i un esborrador per tal de, addicionalment a l'exercici, que és de caire teòric, també es vegin de forma pràctica els resultats que s'utilitzen i els que es proven.

- ***Documents adjunts:***
Fitxa per l'alumnat: A.4.1
Fitxa pel docent: A.4.2

7.2.5 Què passa si es viola la primera llei de la reflexió?

- ***Objectius:***
Es vol donar importància a la primera llei de la reflexió, la qual moltes vegades passa desapercebuda. Per tal de fer-ho, es veuen quines conseqüències tindria el fet que no es tingués. Per avaluar-les, .

- ***Descripció de l'activitat:***
Aquesta activitat es pot realitzar o bé individualment o bé en parelles. Principalment s'han de seguir els apartats que apareixen a la fitxa. Pot ser interessant introduir l'activitat per tothom i fer una conclusió final tots junts. També resulta engrescador que o bé al principi de la classe, per tal de despertar la curiositat i l'interès de l'alumnat, o bé al final, per posar la cirereta, fer una experiència en la qual s'observi la segona llei de la reflexió. També és recomenable que per tal de fer l'experiència participin els propis alumnes.

- ***Continguts, competències i processos que es treballen de forma destacada:***
Pel que fa als continguts, es tracten el càlcul algebraic, la funció tangent, els llocs geomètrics i de geometria a l'espai plantejament i resolució de problemes mètrics a l'espai.

  En quant a les competències generals, es treballen sobretot la personal i la interpersonal i la de coneixement i interacció amb el món. En relació a les específiques, es tracten sobretot la competència matemàtica i la competència en modelització matemàtica.

- ***Alumnat a qui s'adreça especialment:***
Alumnat de 2n de Batxillerat.

- ***Temporització:***
Variable segons si es fa l'activitat en la seva totalitat o bé només una part.

- ***Interdisciplinarietat, transversalitat i relacions amb l'entorn:***
És clara la connexió que té amb física, més particularment amb l'òptica.

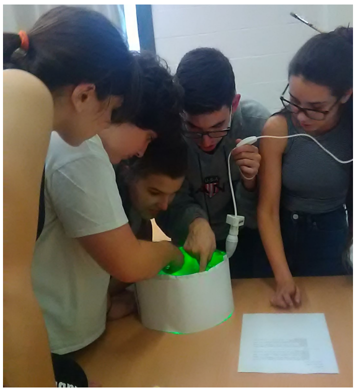
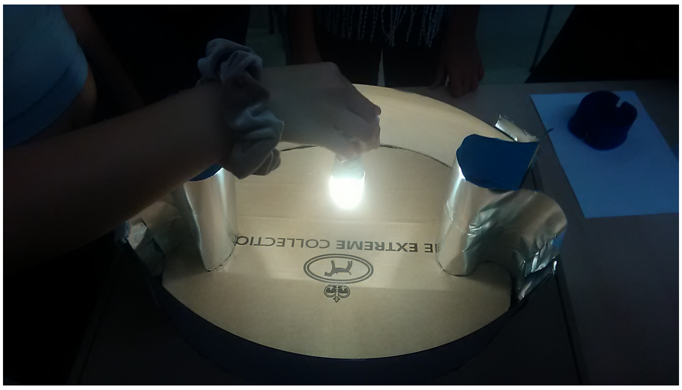
- ***Aspectes didàctics i metodològics:***
  El paper del professor és estimular, acompanyar, plantejar preguntes en la direcció d'avenç i aconseguir que l'ambient de classe sigui l'apropiat.

- ***Recursos:***
  La fitxa A.5.1.

  Opcionalment es pot dur un làser, un mirall i un esborrador per tal de, addicionalment a l'exercici, que és de caire teòric, també es vegin de forma pràctica els resultats que s'utilitzen i els que es proven.

- ***Documents adjunts:***
  Fitxa per l'alumnat: A.5.1
  Fitxa pel docent: A.5.2

7.2.6 Aplicant el mètode científic: El problema de la Il·luminació

- ***Objectius:***
  Amb aquesta activitat es pretén assolir un doble objectiu.

  D'una banda, es vol donar a conéixer el problema de la Il·luminació, des d'un punt de vista interdisciplinar, donant lloc a matemàtiques més recents i diferents a l'aula i que desperti emocions.

  D'altra banda, es persegueix que els alumnes duguin a la pràctica l'estudiat Mètode Científic, en Ciències del Món Contemporani, amb una activitat fresca i integradora.

- ***Descripció de l'activitat:***
  Inicialment es treballa amb tot el grup classe i es pregunta què es necessita per tal de dur a la pràctica el mètode científic. En obtenir la resposta que una pregunta, se'ls planteja el problema de la il·luminació; tan sols una de les dues preguntes per tal d'alleugerir la càrrega de continguts i afavorir la comprensió per part de tot l'alumnat. A continuació el següent pas és fer una mica de recerca per tal de familiaritzar-se amb el tema, de manera que és l'ocasió perfecte per comentar com es propaga la llum en un medi com l'aire i parlar de les lleis de la reflexió i fer les experiències amb alumnes voluntaris. Arribats en aquest punt, se'ls pot demanar als alumnes que conjecturin la resposta a la pregunta i que l'argumentin. A continuació, es formen equips, els quals duran a terme la part més pràctica. La divisió en grups estarà en funció del nombre d'alumnes a classe i del nombre de models físics dels

quals es disposin. Durant la part pràctica, els alumnes hauran de respondre les preguntes de la fitxa, plantejar-ne de noves, reflexionar sobre el tipus de cambra que estan tractant i tornar-se experts en la matèria. És interessant si es va rotant de manera que els equips tractin més d'un tipus de cambra, tot i que això dependrà del temps. Finalment, s'ha de posar en comú, i és una oportunitat fantàstica perquè cada equip faci una exposició davant de la resta de companys exposant el que han après i el que els ha sorprès, donant lloc, també, a que el docent complementi les explicacions i matitzi o plantegi noves preguntes si és adient. Seria recomenable que els alumnes fessin una memòria un cop finalitzada l'activitat.

- ***Continguts, competències i processos que es treballen de forma destacada:***
  Pel que fa als continguts, relatiu a fisica es treballa com es propaga la llum en un medi isòtrop i la primera i la segona llei de la reflexió. Referent a mates, es tracta geometria, llocs geomètrics i rebots en l'el·lipse. En relació a ciències del món contemporani, es du a la pràctica el Mètode Científic, a més de dur un problema de recerca matemàtica a l'aula que ha tingut avenços en els últims anys.

  En quant a les competències generals, es treballen sobretot la de recerca i la personal i la interpersonal. En relació a les específiques, es tracten sobretot la competència matemàtica i la competència en experimentació.

- ***Alumnat a qui s'adreça especialment:***
  Alumnat de Batxillerat

- ***Temporització:***
  A partir d'hora i mitja

- ***Interdisciplinarietat, transversalitat i relacions amb l'entorn:***
  És palès que hi ha una connexió de les assignatures de física, matemàtiques i ciències del món contemporani.

  Considero pertinent comentar que els models emprats per fer les experiències van recordar a un professor de Dibuix Tècnic, especialitzat en arts, Toni Llevot, a les obres de Richard Serra. Addicionalment, alumnes de l'artístic del Vallès havien construït estructures amb miralls. En conseqüència, potser es pot vincular al món de les arts també.

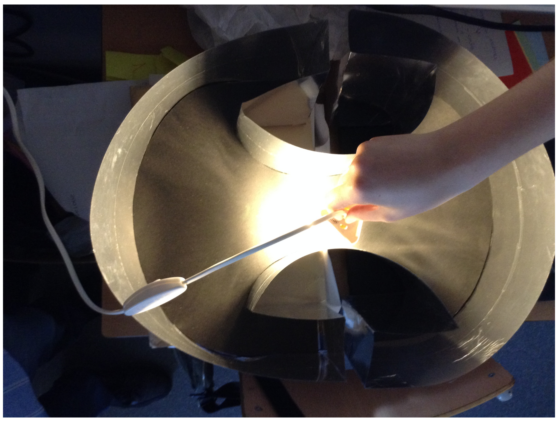
- ***Aspectes didàctics i metodològics:***
  Les qüestions es poden treballar en petits grups heterogenis per tal d'afavorir la participació i la reflexió entre l'alumnat. Per tant, l'avaluació hauria d'incloure aspectes com la implicació, el treball en equip i la quantitat i la qualitat de les aportacions.

  El paper del professor és estimular, acompanyar, plantejar preguntes en la direcció d'avenç i aconseguir que l'ambient de classe sigui l'apropiat.

- ***Recursos:***
  Làsers (amb piles), llums (amb bombetes), allargadors, models físics i fitxes A.6.1 .

- ***Documents adjunts:***
  Fitxa per l'alumnat: A.6.1
  Fitxa pel docent: A.6.2

7.2.7 Recorregut pel Problema de la Il·luminació



- ***Objectius:***
  Dur el problema de la Il·luminació, de manera que es puguin portar matemàtiques més actuals a l'aula, que es tractin les el·lipses contextualitzades, que es vegin connexions entre les matèries de matemàtiques i física i que es facin activitats experimentals en l'àmbit matemàtic.

- ***Descripció de l'activitat:***
  L'activitat està plantejada per fer-la amb tot el grup classe, i té caràcter divulgatiu i experimental sobretot.

  Inicialment es parla del problema de la Il·luminació i es presenten algunes dades històriques. A continuació es comenta la necessitat de familiaritzar-se amb el context del problema i es comenten com es propaga la llum en un medi com l'aire i les lleis de la reflexió. Es pot fer, addicionalment, una experiència pràctica. A continuació es planteja com és la reflexió en una superfície que no és plana. A partir d'aquí dóna lloc a estudiar els rebots en les còniques i d'altres. En funció del temps es poden tractar més o menys, però és essencial parlar de l'el·lipse. La classe es pot subdividir en grups per tal d'experimentar amb les estructures de les semiel·lipses i així veure les propietats dels seus rebots. A partir d'aquí es pot presentar el contraexemple presentat per Penrose i preguntar com s'il·lumina des dels diferents punts, de forma que els propis alumnes puguin adonar-se que aquesta cambra dóna resposta a la pregunta inicial. Seguidament, es pot plantejar als alumnes que intentin dissenyar un model, inspirant-se en aquest, o no, que sigui un contraexemple per a la segona pregunta. Les propostes es poden presentar i discutir amb tot el conjunt classe i finalment es pot donar a conéixer l'últim disseny. Addicionalment es pot parlar de la versió poligonal del problema.

- ***Continguts, competències i processos que es treballen de forma destacada:***
  Pel que fa als continguts, relatiu a fisica es treballa com es propaga la llum en un medi isòtrop i la primera i la segona llei de la reflexió. Referent a mates, es tracta geometria, llocs geomètrics, rebots en l'el·lipse i resolució de problemes.

  En quant a les competències generals, es treballen sobretot la de recerca i la personal i la interpersonal. En relació a les específiques, es tracten sobretot la competència matemàtica i la competència en experimentació.

- ***Alumnat a qui s'adreça especialment:***
  Alumnes de Batxillerat

- ***Temporització:***
  A partir d'hora i mitja

- ***Interdisciplinarietat, transversalitat i relacions amb l'entorn:***
  L'activitat està intrínsecament relacionada amb la física, particularment amb l'òptica.

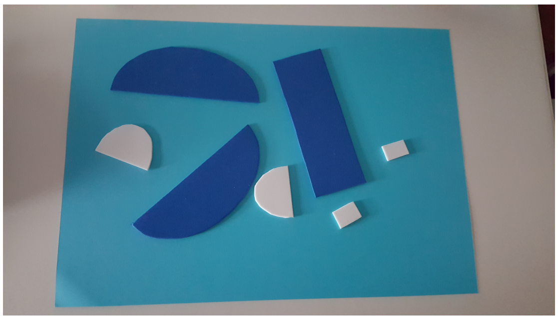
  Es poden fer nous dissenys basats en el model de l'habitació de Penrose o bé altres versions i aquests poden construir-se en col·laboració amb l'àrea de tecnologia.

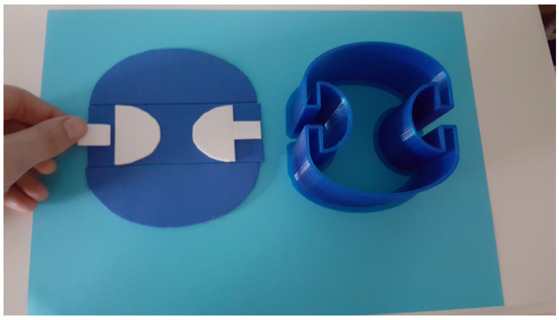
- ***Aspectes didàctics i metodològics:***
  Les qüestions es poden treballar en petits grups heterogenis per tal d'afavorir la participació i la reflexió entre l'alumnat. Per tant, l'avaluació hauria d'incloure aspectes com la implicació, el treball en equip i la quantitat i la qualitat de les aportacions.

  El paper del professor és estimular, acompanyar, plantejar preguntes en la direcció d'avenç i aconseguir que l'ambient de classe sigui l'apropiat.

- ***Recursos:***
  Làsers (amb piles), llums (amb bombetes), allargadors, estructures semiel·lipses, model de l'habitació de Penrose amb parets reflectants i versió en puzzle amb goma eva.

7.2.8 Anàlisi de la cambra de Penrose





- ***Objectius:***
  Estudiar amb detall la geometria de la cambra de Penrose, incidint sobretot en el tema de les el·lipses i les seves propietats.

- ***Descripció de l'activitat:***
  Aquesta activitat es pot realitzar o bé individualment o bé en parelles. Principalment s'han de seguir els apartats que apareixen a la fitxa. Pot ser interessant introduir l'activitat per tothom i fer una conclusió final tots junts.

- ***Continguts, competències i processos que es treballen de forma destacada:***
  Pel que fa als continguts, es tracten principalment problemes d'incidència i paral·lelisme de rectes, angles i distàncies, resolució de problemes geomètrics i llocs geomètrics.

En quant a les competències generals, es treballen sobretot la de recerca, la digital i la personal i la interpersonal. En relació a les específiques, es tracten sobretot la competència matemàtica i la competència en experimentació.

- ***Alumnat a qui s'adreça especialment:***
  Alumnes a partir de 1r de Batxillerat

- ***Temporització:***
  2 hores

- ***Interdisciplinarietat, transversalitat i relacions amb l'entorn:***
  Es poden fer nous dissenys basats en el model de l'habitació de Penrose o bé altres versions i aquests poden construir-se en col·laboració amb l'àrea de tecnologia.

- ***Aspectes didàctics i metodològics:***
  Les qüestions es poden treballar en petits grups heterogenis per tal d'afavorir la participació i la reflexió entre l'alumnat. Per tant, l'avaluació hauria d'incloure aspectes com la implicació, el treball en equip i la quantitat i la qualitat de les aportacions.

  El paper del professor és estimular, acompanyar, plantejar preguntes en la direcció d'avenç i aconseguir que l'ambient de classe sigui l'apropiat.

- ***Recursos:***
  Model de la cambra de Penrose en tres dimensions (per exemple una impressió 3D), ordinadors amb connexió a internet i idealment amb el programari de Geogebra instal·lat, puzzles de la cambra de Penrose amb goma eva i accès a la fitxa A.7.1.

- ***Documents adjunts:***
  Fitxa per l'alumnat: A.7.1
  Fitxa pel docent: A.7.2

8 Implementació de les activitats

8.1 Matefest-Infofest, Universitat de Barcelona

Figura 26: Mirant com es propaga la llum

Figura 27: Estudiant rebots en l'el·lipse

La Universitat de Barcelona va obrir les portes de la facultat i del món de les matemàtiques i de la informàtica a un munt d'estudiants, professors i tota la gent que hi estiguès interessada. Fou un honor poder formar part d'aquella jornada. Tot i que va ser un dia de molta activitat, va valer molt la pena. Personalment estic molt satisfeta, i no només de la oportunitat que se'm va oferir per fer divulgació i despertar l'interès i la curiositat sobre les matemàtiques a les futures generacions, sinó també de l'aprofitament que se n'ha tret. Realment l'estand va tenir molt bona acollida per part dels estudiants.

A grans trets, la dinàmica duta a terme és la descrita en l'activitat 7.2.7. Un cop venien, els introduïa una mica d'història sobre el problema de la Il·luminació i l'enunciava. Aleshores, els animava a conjecturar sobre el problema i a argumentar les seves especulacions. A continuació, i sense desvetllar encara res, els proposava que ens endinsèssim una mica més en el tema.

Considerant que les hipòtesis del problema es basen en el comportament de la llum, semblava coherent establir certa base sobre el coneixement del comportament d'aquesta. Aquell era el moment perfecte per preguntar-los-hi com es propagava la llum per l'aire. Molts deien que en línia recta, i en efecte. Aleshores els vaig preguntar el perquè, i el seu rostre va canviar, va nèixer en ells la curiositat. Vam fer una experiència amb un làser espolsant uns esborradors de pissarra i vam corroborar que es propagava en línia recta. Però encara no s'havia respost la pregunta. En aquell moment, en el qual estaven totalment engrescats amb el taller, vaig aprofitar per explicar-los que era conseqüència del Principi de Fermat i que la llum es propaga de manera que fa el camí pel qual triga menys temps. Seguidament vam parlar de les lleis de la reflexió i també les vam posar en pràctica. Juntament amb això, mostrava alguns Geogebres.

Fins aquí, havia quedat clar com era la reflexió en superfícies planes, però calia saber què succeïa si les superfícies no eren planes, sinó, per exemple, que la paret es recolzava en una cònica. Un cop introduïdes les còniques, calia estudiar els rebots en l'el·lipse. Però abans, per què no parar-se a identificar què és una el·lipse? Com també saber distingir-la d'una circumferència o d'un altre tipus de figura corba. Era un bon moment per mirar com es construeixen les el·lipses i, de pas, fer una repassada de la seva definició. En efecte, vam parlar del mètode del Jardiner per construir el·lipses i els propis alumnes van poder dibuixar el·lipses mitjançant el material que hi havia a l'estand. Tot seguit, *s'analitzaven els rebots del làser en les el·lipses. La manera de fer era la següent: Sempre es plantejava una pregunta de manera que els alumnes especulessin i fessin conjectures i les argumentessin, i desprès es posava a prova el que s'havia dit. Era emocionant veure com els alumnes s'exaltaven quan havien encertat, i com els altres reflexionaven i acabaven convençuts.*

Finalment, arribava l'hora de la veritat, tornàvem al problema que s'havia enunciat al principi i, amb tota la informació acabada de pair, tornava a fer les preguntes. Alguns alumnes havien canviat de parer, i d'altres que abans s'havien pronunciat, ja no estaven tan segurs dels seus raonaments. És precisament en aquest moment que els presentava la cambra de Penrose. Els preguntava si creien que es podria il·luminar sencera sense que quedessin regions fosques. La majoria deia que no, així que els vaig preguntar si això pensaven que passaria sempre o només si posava el llum en algun punt concret. Els estudiants es posaven a reflexionar, a debatre els uns amb els altres. Desprès de plantejar algunes qüestions més, ho vam posar en pràctica.

En quant als aspectes a millorar, els models que es van emprar podrien ser més consistents, més exactes i més grans per afavorir la part pràctica. Addicionalment, es podrien tractar altres tipus de còniques i, tal com va suggerir l'Artur Travesa en una visita a l'estand, es podria fer més èmfasi on un pot trobar les còniques al món real i, a tall d'exemple, esmentar que la paràbola apareix al far del cotxe. Destacaria, però, que es va assolir l'objectiu de fer divulgació del problema, de física, de matemàtiques, que es va captar l'atenció i l'interès de molts estudiants i, fins i tot, m'atreviria a dir que alguns es van emocionar. Tot plegat, la jornada fou un èxit.

8.2 Institut Salas i Xandri

El curs passat es va encetar una iniciativa en aquest centre, anomenada Mathfreak, de la mà de la professora i matemàtica Olga Bedós. Aquesta es tracta d'una activitat extraescolar, no regular, on un conjunt d'alumnes, els quals cursen 2n d'ESO a dia d'avui, fan voluntàriament ampliacions de matemàtiques i tenen trobades amb científics i experts. Jo vaig tenir el plaer de ser convidada a una d'aquestes sessions, a la qual van assistir cinc alumnes extraordinaris.

Figura 28: Disseny propi dels alumnes

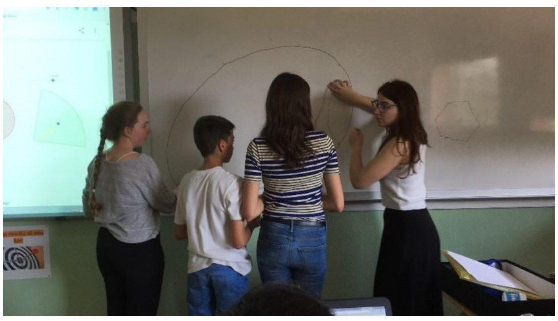


Figura 29: Aplicant el mètode del jardiner

Tenint en consideració el seu curs, havia programat fer l'activitat 7.2.1, amb possibilitat de proposar també 7.2.2. Després d'explicar com es propaga la llum per l'aire, fer una petita experiència i havent discutit el primer exercici, era palès que mostraven una gran facilitat a l'hora de respondre les preguntes i d'anar més enllà. A tall d'exemple, un dels alumnes va identificar no només que la seva cambra no es podia il·luminar en la seva *totalitat ubicant el llum en certa posició, sinó també quines eren les regions que quedaven a les fosques. En discutir els següents apartats, es percebia que assimilaven la matèria molt ràpidament i tenien un gran interès, de manera que vaig considerar que, després d'una selecció dels exercicis presents a les activitats i fer especial èmfasi en les nocions de conjunt convex, concau i estrellat, es podia ampliar encara més el temari. En particular, vam tractar l'el·lipse, qüestió que va sorgir de manera natural, arrel d'una de les figures presents a les fitxes. Concretament, vam emprar el mètode del jardiner per generar una el·lipse a la pissarra i vam introduir les nocions bàsiques.*

Els alumnes van valorar molt positivament fer activitats pràctiques i experimentals i no només teòriques, pensar les matemàtiques d'una forma diferent i treballar el contingut que vam tractar. Pel que fa a qüestions a millorar, potser hauria estat interessant tenir més activitats adreçades a alumnes d'aquests cursos, tot i que la improvització va anar molt bé i va resultar de gran interès per tots ells. De fet, en el Feedback dels alumnes se suggeria com a proposta de millora disposar de més temps per tal de poder anar encara més enllà.

8.3 Institut Vallès

L'Alba Castelltort, professora de ciències de l'Institut Vallès, en escoltar el meu projecte, va confiar en ell i va proposar dur a terme una experiència pràctica amb els alumnes de primer de Batxillerat durant l'assignatura de ciències del món contemporani, amb l'objectiu últim d'apropar un problema de recerca matemàtica que s'ha anat desenvolupant al llarg de les darreres dècades. Per tal d'adequar l'activitat al marc de l'assignatura de ciències del món contemporani, vaig considerar adient plantejar l'activitat tot relacionant-la amb el mètode científic, el qual s'estudia en aquesta mateixa assignatura.

Figura 30: Presentant l'activitat

Figura 31: Exposant la cambra de Penrose

Es van programar tres sessions, d'una hora cadascuna; una amb alumnes del batxillerat tecnològic i humanístic, una amb els del social i una última amb els de l'artístic. És remarcable que les classes eren heterogènies i molts dels alumnes ja no estudiaven matemàtiques. En relació a la dinàmica de les sessions, totes elles van treballar l'activitat 7.2.6 i en conseqüència van seguir a grans trets el següent esquema:

Inicialment es treballava amb tot el grup classe i es preguntava què es necessitava per tal de dur a la pràctica el mètode científic. En obtenir la resposta "una pregunta" se'ls plantejava la segona pregunta del problema de la il·luminació; tan sols una de les dues qüestions per tal d'alleugerir la càrrega de continguts i afavorir la comprensió per part de tot l'alumnat. A continuació, el següent pas era fer una mica de recerca per tal de familiaritzar-se amb el tema, de manera que es preguntava als alumnes com es propagava *la llum en un medi com l'aire i també se'ls feia conjecturar i parlar sobre les lleis de la reflexió, tot fent experiències amb alumnes voluntaris mitjançant un làser, un esborrador i un mirall. Arribats en aquest punt, se'ls demanava que conjecturessin la resposta a la pregunta i que l'argumentessin. A continuació, es formaven equips, els quals havien de dur a terme la part més pràctica. Es formaven uns quatre o cinc equips, aprofitant que s'havien portat 5 models físics de cambres. Durant la part pràctica, els alumnes havien de respondre les preguntes de la fitxa que se'ls entregava i reflexionar sobre el tipus de cambra que estaven tractant. Per mancança de temps fou impossible fer que els alumnes rotessin i treballessin més d'un tipus de cambra. Finalment, s'havia de posar en comú.*

Cal destacar alguns aspectes de la implementació a l'aula. Pel que fa a possibles millores, es va veure que assistir als diferents equips amb un sol professor a l'aula alentia el procès. Per tant, és adient programar més temps per aquesta activitat o, sinó, que hi hagi més d'un professor a l'aula, sobretot amb els grups del social i de l'artístic amb els quals sorgien més dubtes de com dur a terme la pràctica. Una altra possible millora és disposar de més models físics, per tal que els equips no siguin tan nombrosos (eren d'entre 6 i 8 persones). Addicionalment, durant la pràctica, es va observar que cal tenir cura que hi hagi poca llum, que algun dels models podia perfeccionar-se i que convenia presentar les diferents cambres a tota la classe abans de repartir-les als diferents equips, de manera que en fer les conclusions finals els alumnes copsessin les reflexions dels seus companys més àgilment. En quant a aspectes positius, pel que fa a mèrits dels alumnes al llarg de l'activitat, convé fer ressaltar que tots els alumnes es van involucrar en l'activitat, independentment de la branca de la qual procedien. En particular, el grup de l'artístic es va mostrar molt participatiu a l'hora de conjecturar. Una altra anècdota rellevant és que la Maria, una estudiant de l'humanístic, quan un dels seus companys va exposar que la cambra de Penrose no es podia il·luminar en la seva totalitat, encara que ella no havia tractat aquesta cambra, va entendre que el disseny de Penrose era un contraexemple que justificava que la resposta a la pregunta que ens havíem plantejat inicialment era que no, i així ho va compartir amb la resta de la classe.

8.4 Institut Sant Joan Bosco

L'Àngel Prado, estudiant de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona i professor voluntari de classes d'ampliació i de repàs a l'Institut Sant Joan Bosco, va accedir que fes una classe de divulgació sobre el Problema de la Il·luminació.

Atès que s'apropaven les Proves d'Accès a la Universitat, i les activitats eren totalment voluntàries, van venir tres alumnes de primer de batxillerat del científic. L'esquema de la classe fou, a grans trets, el descrit a l'activitat 7.2.7.

Cal destacar alguns aspectes de la implementació a l'aula. Pel que fa a possibles millores, potser haguès estat bé tenir tots els geogebres pujats a internet, per tal de poder accedir-hi i projectar-ho amb més agilitat. Tot i així, la classe va funcionar molt bé, pràcticament estava feta a mida, un grup reduït d'alumnes molt desperts, amb els quals era molt fàcil interactuar. A més, la durada de la classe era indeterminada, així que es va poder ampliar tant l'activitat com van voler els propis alumnes. Quant a aspectes positius, en relació als mèrits dels alumnes al llarg de l'activitat, convé fer ressaltar que tots els alumnes es van involucrar en l'activitat i van plantejar moltes preguntes. En particular, voldria destacar les següents. D'una banda, el Carlos, va preguntar inicialment si, potser, un caràcter periòdic era la clau per tal d'obtenir un contraexemple que provés que la resposta a la pregunta del problema de la Il·luminació era negativa. Realment, a travès *de la pregunta es desprenia la intuició que, si donada una casolística, aquesta es repetia indefinidament de manera que no tot quedés il·luminat, ja es tindria la resposta, ja que es tindrien tots els casos coberts. D'altra banda, l'Arnau, gairebé al final de la classe, quan vaig presentar la cambra de Tokarsky i de Castro, va preguntar una qüestió la idea base de la qual era: Per què l'estructura sembla seguir alguna mena de patró? Per què no hi havia una regió més "punxeguda"? Em va semblar fantàstica la pregunta, ja que donava peu a explicar que la figura, en sí, era una repetició del mateix triangle i vam poder comentar també els rebots i els desdoblegaments. Cal també remarcar que, un cop havia sorgit el primer disseny de la cambra de Penrose, el contraexemple per la primera pregunta, els vaig preguntar si s'atrevien a dissenyar un contraexemple per a la segona pregunta. Després que en Carlos fes un intent, l'Edu va sortir a la pissarra (com es veu a les fotografies de la dreta) i va dibuixar un disseny de cambra no il·luminable des de cap punt, diferent al de Penrose i a les variants més exteses.*

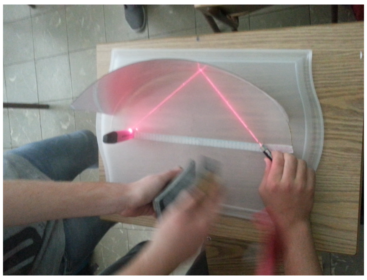


Figura 32: Estudiant rebots en l'el·lipse

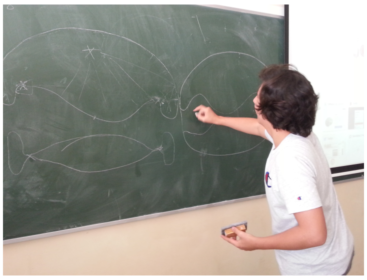


Figura 33: Dissenyant noves cambres

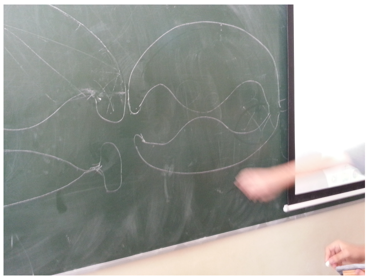


Figura 34: Contraexemple d'un alumne

8.5 Institut Baixamar

El Jordi Font, professor de matemàtiques de l'institut Baixamar, de didàctica tant de grau com de Màster a la Universitat de Barcelona i membre del grup cúbic, em va brindar la fantàstica oportunitat de fer una sessió sobre el Problema de la Il·luminació amb alumnes de primer de batxillerat del científic i tecnològic al laboratori de matemàtiques. Tal com en el cas anterior, em proposava dur l'activitat 7.2.7, ja que té molta unitat, és molt completa i permet arribar a copsar el problema de la Il·luminació en profunditat. La dinàmica de la classe, com en els casos anteriors, a grans trets, fou la descrita a l'activitat 7.2.7.

En aquesta ocasió, però, es va portar absolutament tot el material, per tal que l'aprenentatge fos vivencial. A més, comptava amb la particularitat que només calia repassar les còniques, ja que les havien tractat a classe. Aquest fou un punt important, ja que d'altra forma no hagués estat viable fer tot el recorregut del problema, per qüestió de temps. De fet, aprofitant que els alumnes ja coneixien les còniques, i atès que teníem dos convidats especials de quart d'ESO, fou un dels alumnes, l'Òscar, qui va sortir a la pissarra i va presentar-les, tot amb la col·laboració d'en Josep, que va explicar com era el mètode del jardiner. Aquestes són només algunes de les moltes aportacions que van fer els alumnes, atès que, com sempre se'ls estava estimulant a travès de preguntes, se'ls convidava a ser molt participatius durant l'activitat.

Referent als dos alumnes de quart d'ESO convidats, cal fer una menció especial. No en sabia res jo, però resulta que, arrel que jo fes el TFG sobre aquesta temàtica, havia arribat a les oïdes d'aquests alumnes l'enunciat del problema de la Il·luminació. En veure el tema curiós i amb potencial, van decidir orientar el seu Projecte de Recerca en aquesta *direcció, fent una simplificació del problema i tractant bàsicament la il·luminació directa. En tot cas, això prova que l'elecció del tema a tractar en el TFG ha estat molt encertada, ja que ha despertat l'interès dels alumnes com perquè decideixin treballar voluntàriament sobre això. No obstant, això no és tot. Com a la sessió a l'institut Sant Joan Bosco, un cop estudiats els rebots en l'el·lipse i com s'il·lumina el primer contraexemple de la cambra de Penrose, els vaig preguntar si s'atrevien a dissenyar una cambra no il·luminable des de cap punt. En aquest cas, portava unes peces, com un puzzle, per tal d'agilitzar-ho. Novament, un dels alumnes, va crear un nou disseny, diferent a les versions més exteses i també al dibuixat per l'Edu. Es tractava de l'Arian, un dels dos estudiants de quart, i el seu disseny és el que es mostra a la figura. Sens dubte, el mèrit de la troballa és de l'alumne, però és una gran satisfacció haver brindat l'oportunitat del descobriment.*

Figura 35:
Classe al Laboratori

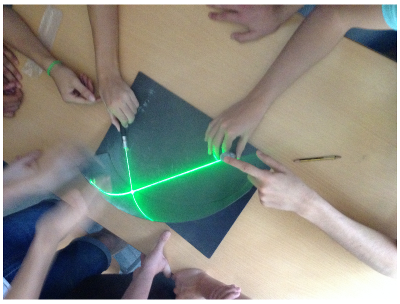


Figura 36:
Estudiant rebots en l'el·lipse

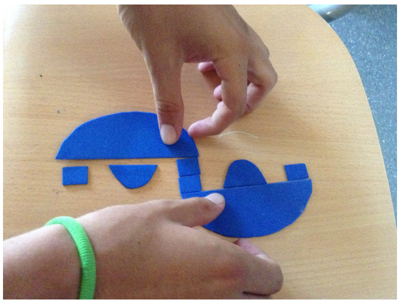


Figura 37:
Contraexemple d'un alumne

9 Conclusions

"Ensenyar matemàtiques ha de ser equivalent a ensenyar a resoldre problemes. Estudiar matemàtiques no ha de ser res més que pensar en la solució de problemes."

Lluís Santaló

Tal com afirma Santaló, a travès de problemes, com el de la Il·luminació, he pogut estudiar molta matemàtica, no només a nivell de conceptes, proposicions i resultats, sinó en la manera de pensar i de raonar. Considero que m'he submergit totalment en el Problema de la Il·luminació i, assegurant tenir una bona base i enfocant-ho des de diferents punts de vista, tant de matemàtiques com de física, he adquirit una comprensió més profunda i rica de la situació.

De la mateixa manera, també ha estat possible que alumnes de diferents centres, poblacions i edats estudiessin matemàtiques a travès de les implementacions de les activitats dissenyades en el treball. Aquestes destaquen pel seu caràcter interdisciplinar i el paper que juguen els materials manipulatius, les activitats pràctiques i les TAC. Cal fer notar que, en estar dirigides per a diferents nivells i totes elles emmarcades en el Problema de la Il·luminació, podrien esdevenir una línia de centre.

Addicionalment, s'ha vist que el projecte ha funcionat molt bé a l'aula, ja que ha despertat la curiositat i l'interès dels alumnes i els ha mostrat les matemàtiques des d'una altra perspectiva. Això es traspua en el Feedback que he rebut i, per citar-ne alguns:

"M'ha agradat la manera dinàmica amb la que s'ha fet la classe. Gràcies"

"He après que les mates no són només números"

"M'ha agradat pensar d'una forma diferent les mates i fer activitats pràctiques i no només teòriques"

"M'ha agradat la forma d'explicar-ho i tots els continguts explicats"

"La sessió m'ha semblat molt interessant perquè hem fet experiments divertits i gràcies a aquests he après més coses sobre la il·luminació"

Per tant, es pot afirmar que escapar dels exercicis mecànics ha permès que es treballi competencialment, alhora que s'assolien nous continguts i s'ha connectat amb les emocions, que són una part integral de l'aprenentatge.

Naturalment, aquest resultat ha estat fruit de moltes hores de reflexió sobre com portar-ho a l'aula, com fer-ho més atractiu i asequible, com plantejar reptes i preguntes més obertes per aquells alumnes més avançats, quins materials o eines eren els més adequats en cada cas, com construir-los o crear-los, tant els físics com els digitals. Certament ha estat tot un repte, però s'han aconseguit les fites inicialment proposades i és molt emocionant viure-ho en primera persona.

Abans de concloure, crec necessari mencionar que el blog que es va crear per a aquest treball, `theilluminationproblem.blogspot.com.es`*, ja ha superat les mil visites i, en introduir "el problema de la il·luminació" al cercador de Google, acostuma a trobar-se en segona i tercera posició.*

Finalment, aquest treball ha estat una experiència molt enriquidora a nivell personal, perquè és molt valuós per a mi haver tingut un petit tastet de la noble i trepidant professió que vull exercir en un futur.

Referències

[1] Klee, V. (1971). The use of research problems in high school geometry. Dins: Steiner H. G. (eds). *The Teaching of Geometry at the Pre-College Level* (p. 206-213). University of Erlangen-Nürnberg, PH Bayreuth, West Germany.

[2] Klee, V. (1969). “Is every polygonal region illuminable from some point?” *The American Mathematical Monthly* 76, 180.

[3] Tokarsky, G. W. (1995). “Polygonal Rooms Not Illuminable from Every Point.” *The American Mathematical Monthly* 102, 867-879.

[4] Pickover, C. A. (2012). “Habitaciones que no se pueden iluminar”. Dins: Pickover, C. A. *El libro de la física* (p. 468-469). Holanda: Librero. ISBN 9789089981660.

[5] Penrose L. S. i Penrose R. (1958). “Puzzles for Christmas”. *The New Scientist*, 25 Dec, 1580-1581, 1597.

[6] Guy, R.; Klee, V. (1971). “Monthly Research Problems”, 1969-71. *The American Mathematical Monthly*, vol. 78, num. 10, 1113-1122.

[7] Rauch, J. (1978). “Illumination of Bounded Domains.” *The American Mathematical Monthly* 85, 359-361.

[8] Croft, H. T.; Falconer, K. J.; i Guy, R. K. (1991). “Illumination Problems”. Dins: Croft, H. T.; Falconer, K. J.; i Guy, R. K., *Unsolved Problems in Geometry: Unsolved Problems in Intuitive Mathematics* (p. 18-19). New York: Springer-Verlag.

[9] Klee V.; Wagon, S. (1991). *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory* N.11, p. 3-5. Cambridge University Press

[10] Castro, D. (1997) “Corrections.” *Quantum* vol 7, núm 3, 42.

[11] Lelièvre, Samuel; Monteil, Thierry; Weiss, Barak. (2016) “Everything is illuminated.” *Geom. Topol.* vol 20 , núm 3, 1737–1762.

[12] The Illumination Problem - Numberphile. 28 de febrer de 2017. [Accés el 12 de febrer del 2018. Recuperat de `https://www.youtube.com/watch?v=xhj5er1k6GQ`].

[13] Agarwal, Nikita; Shah, Riddhi; Venkataraman, Geetha. (2018). Maryam Mirzakhani The Master Artist of Curved Surfaces. Resonance. 23. 10.1007/s12045-018-0615-1. (19 de maig de 2018, `https://www.researchgate.net/publication/324154274_Maryam_Mirzakhani_The_Master_Artist_of_Curved_Surfaces`)

[14] Mansuy, Roger. “A Little Layout Problem”. Dins: Research in France. 15 de novembre de 2017. (10 de maig de 2018, `https://www.researchinfrance.com/single-post/2017/11/15/A-Little-Layout-Problem`)

[15] Dorfman, A. G. (1994). *Óptica de las secciones cónicas.* Madrid: Rubiños-1860, S. A. . ISBN 8480410485.

[16] de León, M. i Timón, A. (2017). *Las matemáticas de la luz.* Madrid: CSIC, Catarata. ISBN 9788490973585.

[17] Santos Benito, J. V. *Manual de Óptica Geométrica.* Alicante: Ed. Club Universitario. ISBN 8489522995

[18] Tarrío, Javier. (2003) "Principio de Fermat" Dins: *La web de la física.* [17 de març de 2018, http://www.lawebdefisica.com/dicc/fermat/]

[19] Mateos, F.; Carretero, L.; Fimia, A.; Fuentes, R. M. i Pascual, I. (1996). "Tema 2". Dins Mateos, F.; Carretero, L.; Fimia, A.; Fuentes, R. M. i Pascual, I. *Curso de introducción a la óptica geométrica* (p. 41-68). Alicante: Universidad de Alicante. ISBN 847908295X

[20] Orestes N. Stavrodius (2006). "Fermat's Principle and the Variational Calculus". Dins: Orestes N. Stavrodius *The Mathematics of Geometrical and Physical Optics* (p. 3-11)

[21] Velasco, Enrique. "Distancia más corta entre dos puntos en el espacio 3D", Dins: Mecánica y Ondas I (2002-03) Soluciones hoja 3 de problemas. 30 de desembre de 2002. (març de 2018, recuperat de https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/evelasco/docencia/HOJA3/hoja3r/node1.html)

[22] Tipler P. A.; Mosca G. (2005). *Física para la Ciencia y la Tecnología* Vol 1, Mecánica, Oscilaciones y ondas, Termodinámica, Barcelona: Editorial Reverté.

[23] de Guzmán Ozamiz, M. (2006). *Para pensar mejor* Madrid: Ediciones Pirámide. ISBN: 9788436820713

[24] Currículum Batxillerat Decret 142/2008 DOGC núm. 5183. [27 de desembre de 2017, http://xtec.gencat.cat/web/.content/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/0082/c5fe6a2e-9a69-4acc-b723-c5d4fe75e7a0/matematiques.pdf]

[25] Currículum educació secundària obligatòria Àmbit matemàtic (matemàtiques) Decret 187/2015 DOGC núm. 6945-28.8.2015 26 [27 de febrer 2017, http://www.xtec.cat/monografics/documents/curriculum/secundaria/annex4.pdf]

[26] Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic* [3 de gener de 2018, http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/colleccions/competencies-basiques/eso/eso-matematic.pdf]

[27] Aubanell Pou, Anton. *Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària*, Memòria de la llicència d'estudi retribuïda corresponent al curs 2005-2006 en l'especialitat de Matemàtiques. [24 de març de 2018, http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200506/memories/1005m.pdf]

[28] Fornell, Rosa (2010). *El Pla TAC de centre. – (Col·lecció TAC ; 1).* Generalitat de Catalunya, Departament d'Educació [15 de juny de 2018, http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/colleccions/tac/pla-tac-centre/tac_1.pdf]

[29] Aplicació de Recursos al Currículum [14 de novembre de 2017, http://apliense.xtec.cat/arc/]

A Activitats

A.1 Versió simplificada del problema de la Il·luminació I

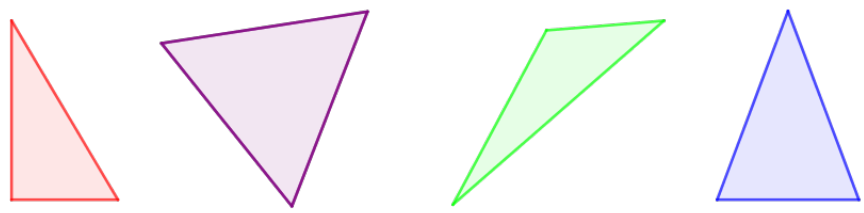
A.1.1 Fitxa per l'alumnat

N'hi ha prou amb una única font de llum, la qual radia llum en totes les direccions, per il·luminar qualsevol cambra, independentment de la seva geometria, si no podem triar on es col·loca el llum?

Indicació: Si la resposta és que sí, caldria provar que això es compleix sempre, sigui com sigui la cambra i sigui on sigui que es posi el llum. En canvi, si la resposta és que no, hi haurà com a mínim una cambra que no es pugui il·luminar en la seva totalitat si el llum es posa en determinades posicions.

Agrupeu-vos en petits grups i comenteu les següents qüestions:

1. Fes un dibuix de la base de la teva habitació, sense mobles.
   - Fixa el llum en una posició. Es podria il·luminar la cambra sencera sense que es generessin ombres?
   - I si es canvia la posició del llum?
   - Teniu tots la mateixa resposta? Sigui quina sigui la resposta, a què creieu que es deu això?
2. Considera les següents cambres:

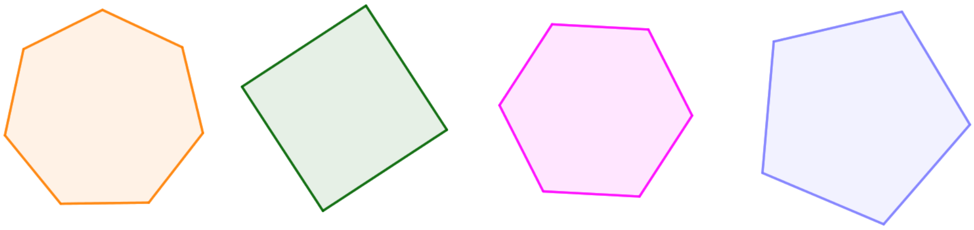
   

   Hi ha alguna característica que tinguin en comú aquestes cambres? En cas afirmatiu, quina?

   Ara respon la següent qüestió per a cada cas:

   - Des de tots els punts de la cambra es podria il·luminar l'habitació sencera amb un sol llum?

   Podeu fer exploracions en el següent geogebra: `https://www.geogebra.org/m/waD7uWKm`*, com també emprar models físics.*
   Heu obtingut les mateixes respostes per totes les cambres, o teniu diferents casos? A què creieu que es deu això?
   (*)EXTRA: T'atraveixes a modificar la geometria de les habitacions i a explorar què passa?
3. Considera les següents cambres:
   Hi ha alguna característica que tinguin en comú aquestes cambres? En cas



afirmatiu, quina?

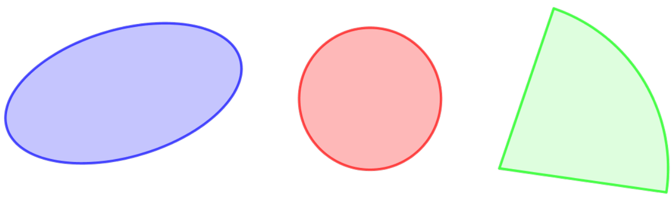
Ara respon la següent qüestió per a cada cas:

- Des de tots els punts de la cambra es podria il·luminar l'habitació sencera amb un sol llum?

Podeu fer exploracions en el següent geogebra: `https://www.geogebra.org/m/YXahPb6v`*, com també emprar models físics.*

Heu obtingut les mateixes respostes per totes les cambres, o teniu diferents casos? A què creieu que es deu això?

4. Considera les següents cambres:



Hi ha alguna característica que tinguin en comú aquestes cambres? En cas afirmatiu, quina?

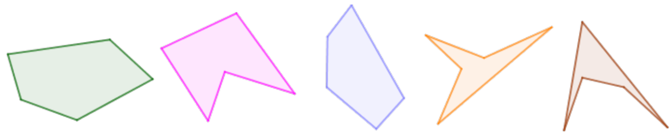
Ara respon la següent qüestió per a cada cas:

- Des de tots els punts de la cambra es podria il·luminar l'habitació sencera amb un sol llum?

Podeu fer exploracions en el següent geogebra: `https://www.geogebra.org/m/x7x9k9z3`*, com també emprar models físics.*

Heu obtingut les mateixes respostes per totes les cambres, o teniu diferents casos? A què creieu que es deu això?

5. Considera les següents cambres:



Hi ha alguna característica que tinguin en comú aquestes cambres? En cas afirmatiu, quina?

Ara respon la següent qüestió per a cada cas:

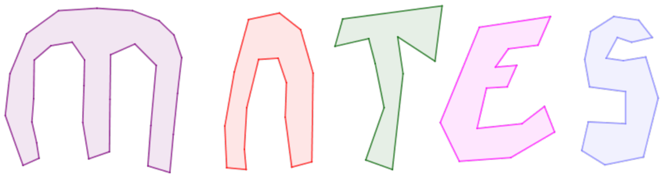
- Des de tots els punts de la cambra es podria il·luminar l'habitació sencera amb un sol llum?

Podeu fer exploracions en el següent geogebra: `https://www.geogebra.org/m/mk6XCAhQ`*, com també emprar models físics.*

Heu obtingut les mateixes respostes per totes les cambres, o teniu diferents casos? A què creieu que es deu això?

(*)EXTRA: T'atraveixes a modificar la geometria de les habitacions i a explorar què passa?

6. Considera les següents cambres:



Hi ha alguna característica que tinguin en comú aquestes cambres? En cas afirmatiu, quina?

Ara respon la següent qüestió per a cada cas:

- Des de tots els punts de la cambra es podria il·luminar l'habitació sencera amb un sol llum?

Podeu fer exploracions en el següent geogebra: `https://www.geogebra.org/m/Qkz4UEZ6`*, com també emprar models físics.*

Heu obtingut les mateixes respostes per totes les cambres, o teniu diferents casos? A què creieu que es deu això?

7. Hi ha algun tret distintiu de les cambres que es poden il·luminar senceres amb un sol llum? I de les que no (si és que n'hi ha)?
8. Feu un debat el conjunt classe sobre si la resposta al problema és que sí, o que no. Recordeu argumentar tot allò que digueu.
9. Dibuixa una cambra que es pugui il·luminar sigui on sigui que es col·loqui el llum.
10. Dibuixa una cambra que no es pugui il·luminar sencera posant el llum en certa posició. Indica on posaries el llum perquè quedessin regions amb ombres. (*extra: Seria possible canviar la ubicació del llum de manera que la cambra quedès il·luminada en la seva totalitat?)
11. Redacteu les vostres conclusions.

A.1.2 Fitxa pel docent

N'hi ha prou amb una única font de llum, la qual radia llum en totes les direccions, per il·luminar qualsevol cambra, independentment de la seva geometria, si no podem triar on es col·loca el llum?

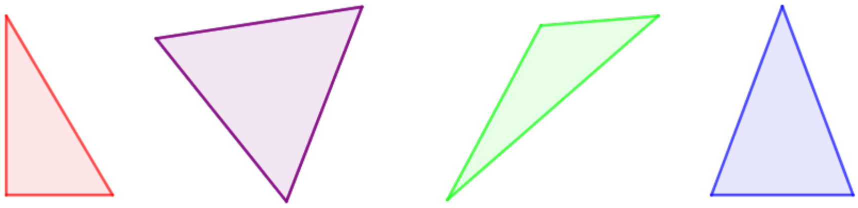
(Aquesta és una simplificació d'una de les qüestions que es va plantejar Ernst Straus al 1950. En la pregunta original s'afegia la hipòtesi que es produïa el fenomen de la reflexió a la frontera de la cambra, és a dir, que es considerava que totes les parets estaven recobertes de material reflectant. Així doncs, fer aquesta activitat és una fantàstica manera d'introduir matemàtiques més actuals a l'aula. A més, obre la porta a tractar el fet que la matemàtica és una ciència viva, que evoluciona i creix i sempre dóna lloc a plantejar noves qüestions. Seguint aquesta mateixa línia, aquesta activitat permet també parlar de la figura dels investigadors i investigadores en matemàtiques.)

Indicació: Si la resposta és que sí, caldria provar que això es compleix sempre, sigui com sigui la cambra i sigui on sigui que es posi el llum. En canvi, si la resposta és que no, hi haurà com a mínim una cambra que no es pugui il·luminar en la seva totalitat si el llum es posa en determinades posicions.

Agrupeu-vos en petits grups i comenteu les següents qüestions: *(agrupar l'alumnat en petits grups permet fomentar la col·laboració, el debat, compartir idees, comprendre les dels altres, argumentar)*

1. Fes un dibuix de la base de la teva habitació, sense mobles. *(es parteix d'un cas personal, de manera que cada alumne s'involucri en l'activitat)*
    - Fixa el llum en una posició. Es podria il·luminar la cambra sencera sense que es generessin ombres?
    - I si es canvia la posició del llum?
    - Teniu tots la mateixa resposta? Sigui quina sigui la resposta, a què creieu que es deu això?

2. Considera les següents cambres:



Hi ha alguna característica que tinguin en comú aquestes cambres? En cas afirmatiu, quina?
Totes aquestes cambres són triangles.

Ara respon la següent qüestió per a cada cas:

- Des de tots els punts de la cambra es podria il·luminar l'habitació sencera amb un sol llum?

  En efecte, atès que totes les cambres són convexes. Aquesta conclusió hauria de fer-se a través d'exploracions.

Podeu fer exploracions en el següent geogebra: `https://www.geogebra.org/m/waD7uWKm`*, com també emprar models físics.*

És remarcable que puguin emprar tan models físics com el Geogebra. Els models físics permeten relacionar el món real amb el problema, veure que no està desvinculat del món real, i les simulacions computacionals donen un altre punt de vista i faciliten un anàlisi més detallat.

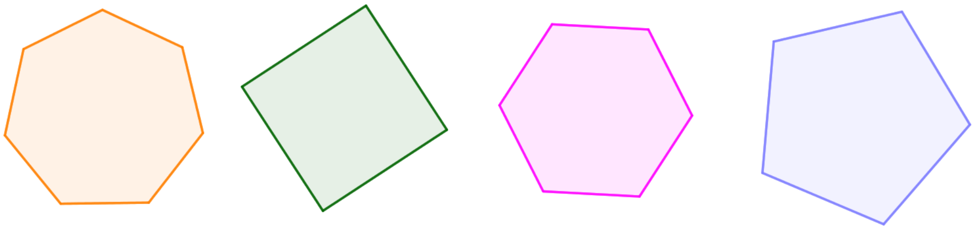
Heu obtingut les mateixes respostes per totes les cambres, o teniu diferents casos? A què creieu que es deu això?

Per totes les cambres s'obtenen les mateixes respostes. La següent pregunta convida a reflexionar i a conjecturar.

(*)EXTRA: T'atraveixes a modificar la geometria de les habitacions i a explorar què passa?

Encara que es modifiqui la posició dels vèrtexs sempre seran triangles, i per tant sempre seran figures convexes. Com que sempre seran convexes, sempre estaran totalment il·luminades.

3. Considera les següents cambres:



Hi ha alguna característica que tinguin en comú aquestes cambres? En cas afirmatiu, quina?
Totes aquestes cambres són polígons regulars.

Ara respon la següent qüestió per a cada cas:

- Des de tots els punts de la cambra es podria il·luminar l'habitació sencera amb un sol llum?

  En efecte, atès que totes les cambres són convexes. Aquesta conclusió hauria de fer-se a través d'exploracions.

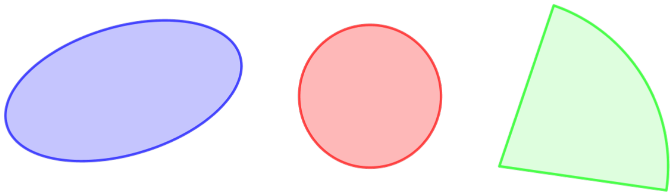
Podeu fer exploracions en el següent geogebra: `https://www.geogebra.org/m/YXahPb6v`*, com també emprar models físics.*

És remarcable que puguin emprar tan models físics com el Geogebra. Els models físics permeten relacionar el món real amb el problema, veure que no està desvinculat del món real, i les simulacions computacionals donen un altre punt de vista i faciliten un anàlisi més detallat.

Heu obtingut les mateixes respostes per totes les cambres, o teniu diferents casos? A què creieu que es deu això?

Per totes les cambres s'obtenen les mateixes respostes. La següent pregunta convida a reflexionar i a conjecturar.

4. Considera les següents cambres:



Hi ha alguna característica que tinguin en comú aquestes cambres? En cas afirmatiu, quina?
Totes aquestes cambres tenen parets corbes.

Ara respon la següent qüestió per a cada cas:

- Des de tots els punts de la cambra es podria il·luminar l'habitació sencera amb un sol llum?

  En efecte, atès que totes les cambres són convexes. Aquesta conclusió hauria de fer-se a través d'exploracions.

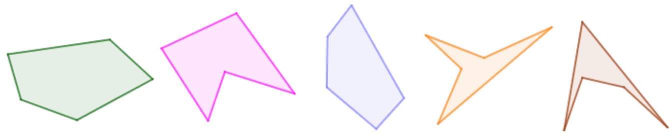
Podeu fer exploracions en el següent geogebra: `https://www.geogebra.org/m/x7x9k9z3`*, com també emprar models físics.*

És remarcable que puguin emprar tan models físics com el Geogebra. Els models físics permeten relacionar el món real amb el problema, veure que no està desvinculat del món real, i les simulacions computacionals donen un altre punt de vista i faciliten un anàlisi més detallat.

Heu obtingut les mateixes respostes per totes les cambres, o teniu diferents casos? A què creieu que es deu això?

Per totes les cambres s'obtenen les mateixes respostes. La següent pregunta convida a reflexionar i a conjecturar.

5. Considera les següents cambres:

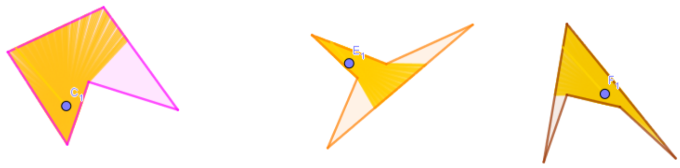


Hi ha alguna característica que tinguin en comú aquestes cambres? En cas afirmatiu, quina?
Totes aquestes cambres són pentàgons.

Ara respon la següent qüestió per a cada cas:

- Des de tots els punts de la cambra es podria il·luminar l'habitació sencera amb un sol llum?

  La primera i tercera cambra són convexes i per tant es podrien il·luminar en la seva totalitat. En canvi, la segona, quarta i cinquena cambres són còncaves, i per tant no es podrien il·luminar des de tots els punts.



Podeu fer exploracions en el següent geogebra: `https://www.geogebra.org/m/mk6XCAhQ`*, com també emprar models físics.*

És remarcable que puguin emprar tan models físics com el Geogebra. Els models físics permeten relacionar el món real amb el problema, veure que no està desvinculat del món real, i les simulacions computacionals donen un altre punt de vista i faciliten un anàlisi més detallat.

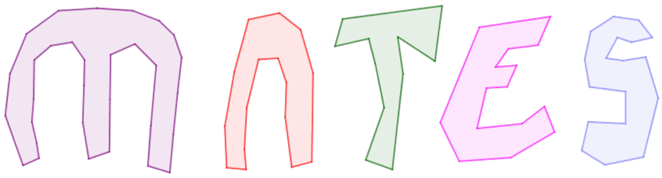
Heu obtingut les mateixes respostes per totes les cambres, o teniu diferents casos? A què creieu que es deu això?

No totes les cambres donen lloc a les mateixes respostes. La següent pregunta convida a reflexionar i a conjecturar.

(*)EXTRA: T'atraveixes a modificar la geometria de les habitacions i a explorar què passa?

En aquest cas els pentàgons poden ser convexos o concaus. En funció del cas, es podran il·luminar en la seva totalitat, o al contrari quedaran regions fosques.

6. Considera les següents cambres:
Hi ha alguna característica que tinguin en comú aquestes cambres? En cas afirmatiu, quina?

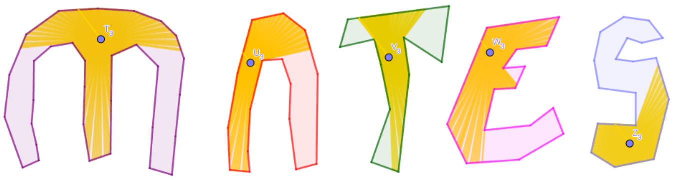


Totes són polígons irregulars.

Ara respon la següent qüestió per a cada cas:

- Des de tots els punts de la cambra es podria il·luminar l'habitació sencera amb un sol llum?

  Totes les cambres són còncaves, per tant sempre existeix una posició tal que de col·locar el llum allà, quedaran regions fosques. A continuació posem uns exemples:



Podeu fer exploracions en el següent geogebra: `https://www.geogebra.org/m/Qkz4UEZ6`*, com també emprar models físics.*

És remarcable que puguin emprar tan models físics com el Geogebra. Els models físics permeten relacionar el món real amb el problema, veure que no està desvinculat del món real, i les simulacions computacionals donen un altre punt de vista i faciliten un anàlisi més detallat.

Heu obtingut les mateixes respostes per totes les cambres, o teniu diferents casos? A què creieu que es deu això?

Totes les cambres donen lloc a les mateixes respostes. La següent pregunta convida a reflexionar i a conjecturar.

7. Hi ha algun tret distintiu de les cambres que es poden il·luminar senceres amb un sol llum? I de les que no (si és que n'hi ha)?

   En efecte, les cambres que es poden il·luminar senceres amb un sol llum són convexes, és a dir, tots els punts es poden connectar amb tots els altres amb segments rectes que estan continguts a la figura. Les cambres que no es poden il·luminar en la seva totalitat són còncaves, és a dir, algun dels punts no es pot connectar a un altre punt mitjançant un segment contingut en la figura.

8. Feu un debat el conjunt classe sobre si la resposta al problema és que sí, o que no. Recordeu argumentar tot allò que digueu.

   És interessant que es faci un debat amb tot el conjunt classe per posar en comú les diferents idees que hagin sorgit. També és interessant conjecturar, ara que s'ha fet una immersió en diferents tipus de cambra, sobre quina és la resposta al problema.

9. Dibuixa una cambra que es pugui il·luminar sigui on sigui que es col·loqui el llum.

   Dibuixar una cambra convexa.

10. Dibuixa una cambra que no es pugui il·luminar sencera posant el llum en certa posició. Indica on posaries el llum perquè quedessin regions amb ombres. (*extra: Seria possible canviar la ubicació del llum de manera que la cambra quedès il·luminada en la seva totalitat?)

    Dibuixar una cambra còncava. La pregunta extra depèn de si la cambra és un conjunt estrellat o no.

11. Redacteu les vostres conclusions.

    Una cambra es pot il·luminar en la seva totalitat des de tots els seus punts si cadascun dels punts es pot connectar a la resta mitjançant un segment que estarà contingut en la figura. Si una cambra no es pot il·luminar en la seva totalitat, és perquè el lloc on es posa el focus no es pot connectar amb cap punt de la regió fosca mitjançant un segment que estigui contingut en la figura.

    OBJECTIU FINAL DE LA FITXA: Distingir les figures còncaves de les convexes. No cal que els hi donin aquest nom, sinó que s'entengui la definició i saber identificar-les

A.2 Versió simplificada del problema de la Il·luminació II

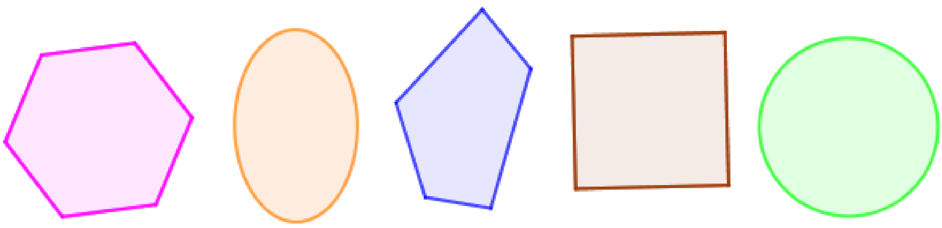
A.2.1 Fitxa per l'alumnat

N'hi ha prou amb una única font de llum, la qual radia llum en totes les direccions, per il·luminar qualsevol cambra, independentment de la seva geometria, si podem triar on es col·loca el llum?

Indicació: Si la resposta és que sí, caldria provar que això es compleix sempre, sigui com sigui la cambra es pot trobar alguna posició de manera que si el llum es col·loca allà, aleshores la cambra s'il·lumina en la seva totalitat. En canvi, si la resposta és que no, hi haurà almenys una cambra que no es pugui il·luminar en la seva totalitat sigui on sigui que es posi el llum.

Agrupeu-vos en petits grups i comenteu les següents qüestions:

1. Considera les següents cambres:



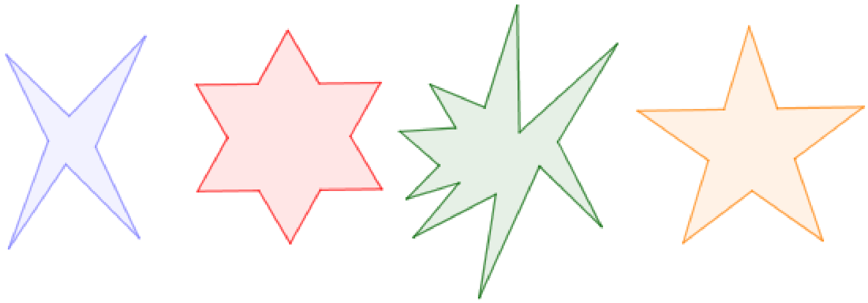
Hi ha alguna característica que tinguin en comú aquestes cambres? En cas afirmatiu, quina?

Ara respon les següents qüestions per a cada cas:

- Si es posa la llum en el centre de la cambra es pot il·luminar la cambra sencera?
- I si es posa en una cantonada? Prova diferents casos.

Podeu fer exploracions en el següent geogebra: `https://www.geogebra.org/m/cMskBRHz`*, com també emprar models físics.* Heu obtingut les mateixes respostes per totes les cambres, o teniu diferents casos? A què creieu que es deu això?

2. Considera les següents cambres:



Hi ha alguna característica que tinguin en comú aquestes cambres? En cas afirmatiu, quina?

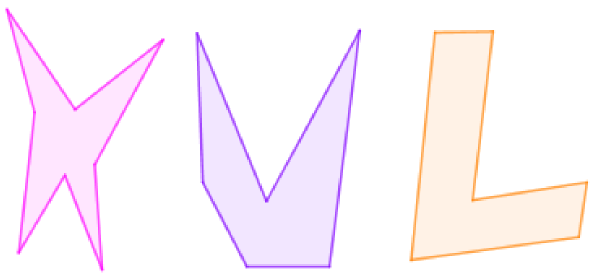
Ara respon les següents qüestions per a cada cas:

- Si es posa la llum en el centre de la cambra es pot il·luminar la cambra sencera?
- I si es posa en un vèrtex? (Prova diferents casos)

Podeu fer exploracions en el següent geogebra: `https://www.geogebra.org/m/g4EPc62R`*, com també emprar models físics.*

Heu obtingut les mateixes respostes per totes les cambres, o teniu diferents casos? A què creieu que es deu això?

3. Considera les següents cambres:



Hi ha alguna característica que tinguin en comú aquestes cambres? En cas afirmatiu, quina?

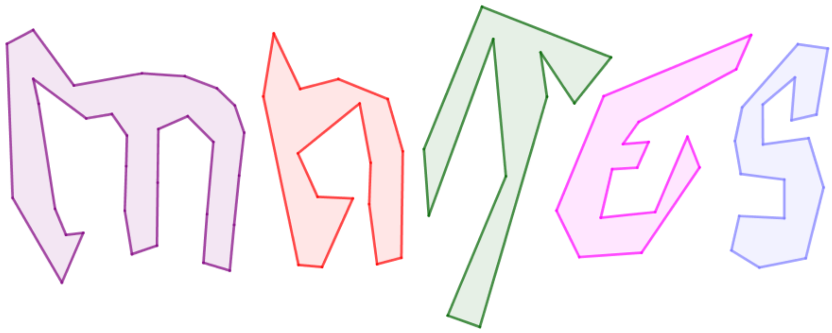
Ara respon les següents qüestions per a cada cas:

- Si es posa la llum en algun punt interior de la cambra es pot il·luminar la cambra sencera? (Prova diferents casos)
- I si es posa en un vèrtex? (Prova diferents casos)

Podeu fer exploracions en el següent geogebra: `https://www.geogebra.org/m/xEMZr95E`*, com també emprar models físics.*

Heu obtingut les mateixes respostes per totes les cambres, o teniu diferents casos? A què creieu que es deu això?

4. Considera les següents cambres:
Hi ha alguna característica que tinguin en comú aquestes cambres? En cas



afirmatiu, quina?

Ara respon les següents qüestions per a cada cas:

- Des de tots els punts de la cambra es podria il·luminar l'habitació sencera amb un sol llum?

Podeu fer exploracions en el següent geogebra: `https://www.geogebra.org/m/hyvv8wFG`*, com també emprar models físics.*

Heu obtingut les mateixes respostes per totes les cambres, o teniu diferents casos? A què creieu que es deu això?

5. Hi ha cambres que no es puguin il·luminar en la seva totalitat encara que poguem triar la ubicació del llum?
6. Hi ha algun tret distintiu de les cambres que només es poden il·luminar si el llum es col·loca en certa posició?
7. Dibuixa una cambra que es pugui il·luminar en la seva totalitat només si el llum es col·loca en determinades ubicacions.
8. Dibuixa una cambra que no es pugui il·luminar sencera sigui on sigui que es col·loqui el llum, si és que n'existeix alguna.
9. Feu un debat el conjunt classe sobre si la resposta al problema és que sí, o que no. Recordeu argumentar tot allò que digueu.
10. Redacteu les vostres conclusions.

A.2.2 Fitxa pel docent

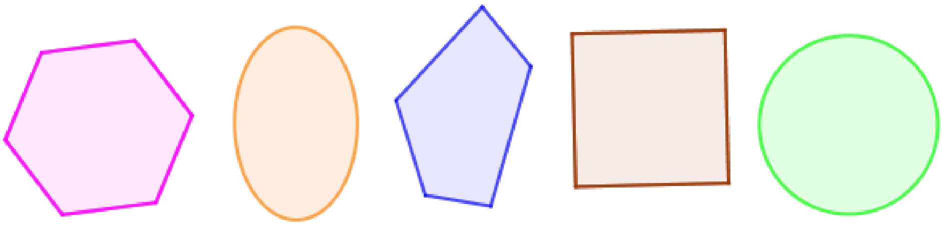
N'hi ha prou amb una única font de llum, la qual radia llum en totes les direccions, per il·luminar qualsevol cambra, independentment de la seva geometria, si podem triar on es col·loca el llum?

(Aquesta és una simplificació d'una de les qüestions que es va plantejar Ernst Straus al 1950. En la pregunta original s'afegia la hipòtesi que es produïa el fenomen de la reflexió a la frontera de la cambra, és a dir, que es considerava que totes les parets estaven recobertes de material reflectant. Així doncs, fer aquesta activitat és una fantàstica manera d'introduir matemàtiques més actuals a l'aula. A més, obre la porta a tractar el fet que la matemàtica és una ciència viva, que evoluciona i creix i sempre dóna lloc a plantejar noves qüestions. Seguint aquesta mateixa línia, aquesta activitat permet també parlar de la figura dels investigadors i investigadores en matemàtiques.)

Indicació: Si la resposta és que sí, caldria provar que això es compleix sempre, sigui com sigui la cambra es pot trobar alguna posició de manera que si el llum es col·loca allà, aleshores la cambra s'il·lumina en la seva totalitat. En canvi, si la resposta és que no, hi haurà almenys una cambra que no es pugui il·luminar en la seva totalitat sigui on sigui que es posi el llum.

Agrupeu-vos en petits grups i comenteu les següents qüestions: *(agrupar l'alumnat en petits grups permet fomentar la col·laboració, el debat, compartir idees, comprendre les dels altres, argumentar)*

1. Considera les següents cambres:



Hi ha alguna característica que tinguin en comú aquestes cambres? En cas afirmatiu, quina?

Totes aquestes cambres són cambres convexes, és a dir, que totes elles es poden il·luminar des de tots els seus punts.

Ara respon les següents qüestions per a cada cas:

- Si es posa la llum en el centre de la cambra es pot il·luminar la cambra sencera?

  La resposta és que sí en tots els casos

- I si es posa en una cantonada? Prova diferents casos.

  La resposta és que sí en tots els casos

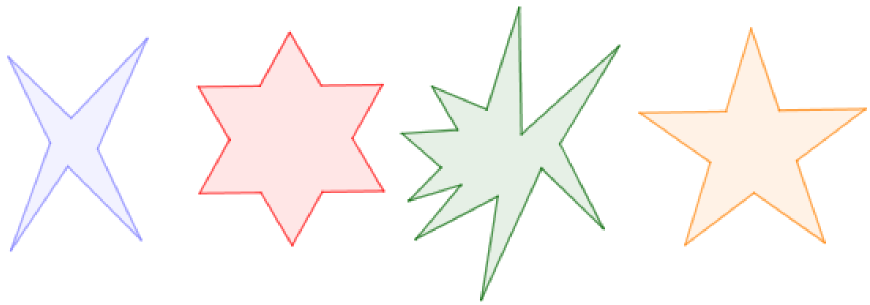
Podeu fer exploracions en el següent geogebra: `https://www.geogebra.org/m/cMskBRHz`*, com també emprar models físics.*

És remarcable que puguin emprar tan models físics com el Geogebra. Els models físics permeten relacionar el món real amb el problema, veure que no està desvinculat del món real, i les simulacions computacionals donen un altre punt de vista i faciliten un anàlisi més detallat.

Heu obtingut les mateixes respostes per totes les cambres, o teniu diferents casos? A què creieu que es deu això?

La resposta és igual en tots els casos. La següent pregunta convida a reflexionar i a conjecturar.

2. Considera les següents cambres:



Hi ha alguna característica que tinguin en comú aquestes cambres? En cas afirmatiu, quina?

Totes aquestes cambres són còncaves, i es tracta en particular de polígons estrellats.

Ara respon les següents qüestions per a cada cas:

- Si es posa la llum en el centre de la cambra es pot il·luminar la cambra sencera?

  La resposta és que sí en tots els casos
- I si es posa en un vèrtex? (Prova diferents casos)

  La resposta depèn del vèrtex escollit. Amb aquest tipus de pregunta s'incentiva la distinció de casos i l'exhaustivitat.

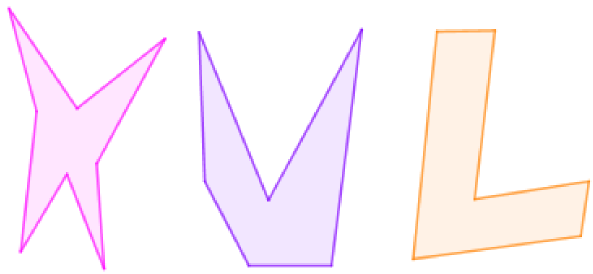
Podeu fer exploracions en el següent geogebra: `https://www.geogebra.org/m/g4EPc62R`, com també emprar models físics.

És remarcable que puguin emprar tan models físics com el Geogebra. Els models físics permeten relacionar el món real amb el problema, veure que no està desvinculat del món real, i les simulacions computacionals donen un altre punt de vista i faciliten un anàlisi més detallat.

Heu obtingut les mateixes respostes per totes les cambres, o teniu diferents casos? A què creieu que es deu això?

La resposta és igual en tots els casos. La següent pregunta convida a reflexionar i a conjecturar.

3. Considera les següents cambres:



Hi ha alguna característica que tinguin en comú aquestes cambres? En cas afirmatiu, quina?

Totes aquestes cambres són còncaves, i es tracta en particular de polígons estrellats.

Ara respon les següents qüestions per a cada cas:

- Si es posa la llum en algun punt interior de la cambra es pot il·luminar la cambra sencera? (Prova diferents casos)

  La resposta depèn del vèrtex escollit. Amb aquest tipus de pregunta s'incentiva la distinció de casos i l'exhaustivitat.
- I si es posa en un vèrtex? (Prova diferents casos)

  La resposta depèn del vèrtex escollit. Amb aquest tipus de pregunta s'incentiva la distinció de casos i l'exhaustivitat.

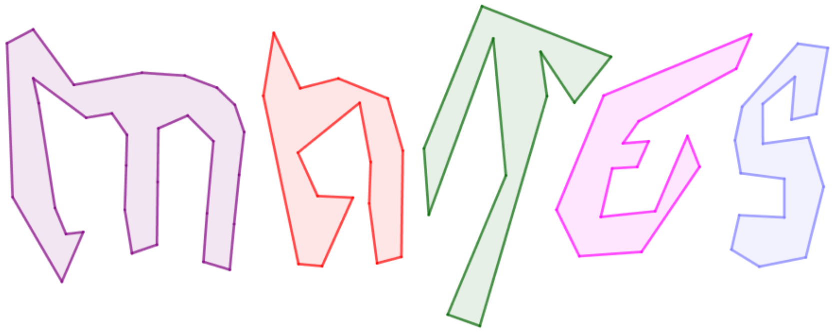
Podeu fer exploracions en el següent geogebra: `https://www.geogebra.org/m/xEMZr95E`*, com també emprar models físics.*

És remarcable que puguin emprar tan models físics com el Geogebra. Els models físics permeten relacionar el món real amb el problema, veure que no està desvinculat del món real, i les simulacions computacionals donen un altre punt de vista i faciliten un anàlisi més detallat.

Heu obtingut les mateixes respostes per totes les cambres, o teniu diferents casos? A què creieu que es deu això?

La resposta és igual en tots els casos. La següent pregunta convida a reflexionar i a conjecturar.

4. Considera les següents cambres:



Hi ha alguna característica que tinguin en comú aquestes cambres? En cas afirmatiu, quina?

Totes aquestes cambres són còncaves, i de fet, no només això sinó que no es podrien il·luminar en la seva totalitat fos on fos que es col·loquès el llum.

Ara respon les següents qüestions per a cada cas:

- Des de tots els punts de la cambra es podria il·luminar l'habitació sencera amb un sol llum?

  No. De fet, no existeix cap punt tal que connecti amb la resta de punts mitjançant un segment contingut en la figura. En altres paraules, cap de les cambres és un conjunt estrellat.

Podeu fer exploracions en el següent geogebra: `https://www.geogebra.org/m/hyvv8wFG`*, com també emprar models físics.*

És remarcable que puguin emprar tan models físics com el Geogebra. Els models físics permeten relacionar el món real amb el problema, veure que no està desvinculat del món real, i les simulacions computacionals donen un altre punt de vista i faciliten un anàlisi més detallat.

Heu obtingut les mateixes respostes per totes les cambres, o teniu diferents casos? A què creieu que es deu això?

La resposta és igual en tots els casos. La següent pregunta convida a reflexionar i a conjecturar.

5. Hi ha cambres que no es puguin il·luminar en la seva totalitat encara que poguem triar la ubicació del llum?

   En efecte, i les figures de l'últim exercici són exemples.

6. Hi ha algun tret distintiu de les cambres que només es poden il·luminar si el llum es col·loca en certa posició?

   L'únic tret distintiu que tenen és que són figures

7. Dibuixa una cambra que es pugui il·luminar en la seva totalitat només si el llum es col·loca en determinades ubicacions.

   Dibuix d'un conjunt estrellat que no sigui convex. És a dir, que només alguns dels seus punts estiguin connectats a la resta mitjançant segments continguts en la figura. Per exemple, una estrella.

8. Dibuixa una cambra que no es pugui il·luminar sencera sigui on sigui que es col·loqui el llum, si és que n'existeix alguna.

   Hi ha infinits exemples. Per prendre un exemple assequible es pot versionar qualsevol cambra de l'exercici 4.

9. Feu un debat el conjunt classe sobre si la resposta al problema és que sí, o que no. Recordeu argumentar tot allò que digueu.

   És interessant que es faci un debat amb tot el conjunt classe per posar en comú les diferents idees que hagin sorgit. També és interessant conjecturar, ara que s'ha fet una immersió en diferents tipus de cambra, sobre quina és la resposta al problema.

10. Redacteu les vostres conclusions.

    Una cambra es pot il·luminar des d'algun dels seus punts si existeix algun punt que es pot connectar a la resta mitjançant segments que estiguin continguts en la figura. D'això se'n diu conjunt estrellat.

    OBJECTIU FINAL DE LA FITXA: Distingir els conjunts estrellats. No cal que els hi donin aquest nom, sinó que s'entengui la definició i saber identificar-los

A.3 Estudi del comportament de la llum

A.3.1 Fitxa de l'alumnat

Objectiu

Estudiar el comportament de la llum en reflectir-se en una superfície reflectant plana, tot tractant qüestions d'estadística i trigonometria.

Material

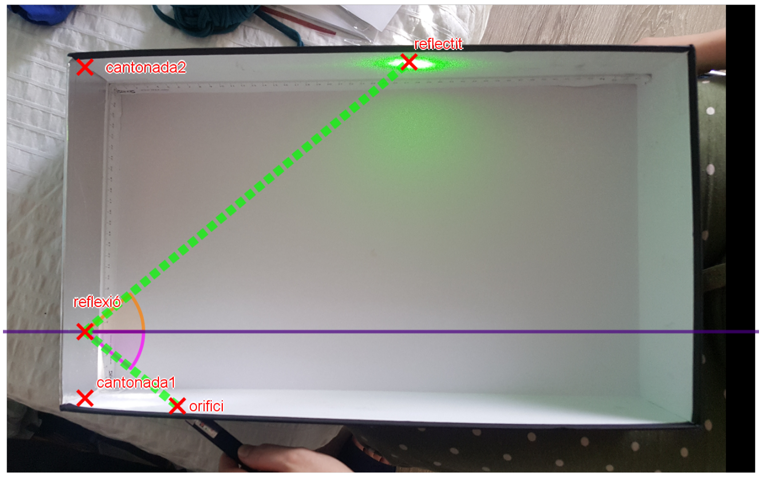
Làser, regla i caixa amb una superfície reflectant enganxada en una de les parets, un orifici en la paret del costat, i dues cintes mètriques enganxades en la paret amb la superfície reflectant i la paret contigua sense orifici, tal com es mostra a la figura:

Procediment

1. Mesura la distància de l'orifici a la cantonada 1, la qual anomenarem f.
2. Si anomenem d_1 la distància de la cantonada 1 a la reflexió i h la distància de la cantonada 2 al punt reflectit, apunta amb el làser en una direcció determinada i mesura d_1 i h.
3. Fes el pas anterior un mínim de 4 cops apuntant a diferents direccions amb el làser.

Resultats i Qüestions

1. Si denotem per d_2 la distància de la reflexió a la cantonada 2, i per D la distància de la cantonada 1 a la 2, fes un dibuix-esquema de la caixa indicant a què correspon f, d_1, d_2, D i h. Inclou el valor si aquest sempre és el mateix independentment de la direcció que pren el làser.
2. Fes una taula de valors f, d_1, d_2 i h que reculli totes les dades que has pres. Fixa't en la següent figura:
3. Amb les dades que es tenen, quina raó trigonomètrica és fàcil de calcular dels angles α i β? Com la calcularies de cada angle en funció de f, d_1, d_2, D i h?



4. Què representa la línia verda?
5. Expressa la longitud del camí verd en funció de f, d_1, d_2, D, h.
6. Ara expressa la longitud del camí verd en funció de d_1, d_2 i les raons trigonomètriques d'α i β que necessitis.
7. En funció de la raó trigonomètrica que més et convingui, fes una taula de valors $\sin\alpha$, $\sin\beta$; $\cos\alpha$, $\cos\beta$; o $\tan\alpha$, $\tan\beta$, recollint les dades que has pres.

   (*)Extra: És possible fer les tres taules de valors? I en cas afirmatiu, t'hi atreveixes?
8. Representa les dades de la taula de valors de l'últim apartat.
9. Fes una regressió lineal gràficament i escriu l'equació de la recta.
10. Comenta els resultats obtinguts.
11. Afegeix les teves dades a la base de dades de tota la classe. Mitjançant un full de càlcul, feu un gràfic de dispersió amb totes les dades recol·lectades de la classe.
12. Afegeix una línia de tendència i escriu l'equació de la recta.
13. Comenta aquests nous resultats i compara'ls amb els teus.
14. El que has obtingut concorda amb la segona llei de la reflexió que afirma que: "L'angle d'incidència, format pel raig incident i la normal a la superfície reflectant, és igual a l'angle de reflexió, format pel raig reflectit i la normal ja mencionada."?

A.3.2 Fitxa del docent

Objectiu

Estudiar el comportament de la llum en reflectir-se en una superfície reflectant plana, tot tractant qüestions d'estadística i trigonometria.

Material

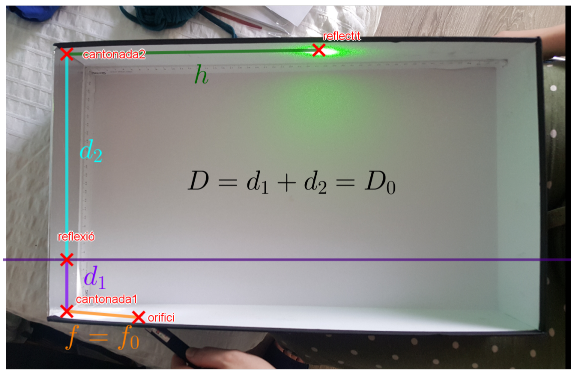
Làser, regla i caixa amb una superfície reflectant enganxada en una de les parets, un orifici en la paret del costat, i dues cintes mètriques enganxades en la paret amb la superfície reflectant i la paret contigua sense orifici, tal com es mostra a la figura:

Procediment

1. Mesura la distància de l'orifici a la cantonada 1, la qual anomenarem f.
2. Si anomenem d_1 la distància de la cantonada 1 a la reflexió i h la distància de la cantonada 2 al punt reflectit, apunta amb el làser en una direcció determinada i mesura d_1 i h.
3. Fes el pas anterior un mínim de 4 cops apuntant a diferents direccions amb el làser.

Resultats i Qüestions

1. Si denotem per d_2 la distància de la reflexió a la cantonada 2, i per D la distància de la cantonada 1 a la 2, fes un dibuix-esquema de la caixa indicant a què correspon f, d_1, d_2, D i h. Inclou el valor si aquest sempre és el mateix independentment de la direcció que pren el làser.

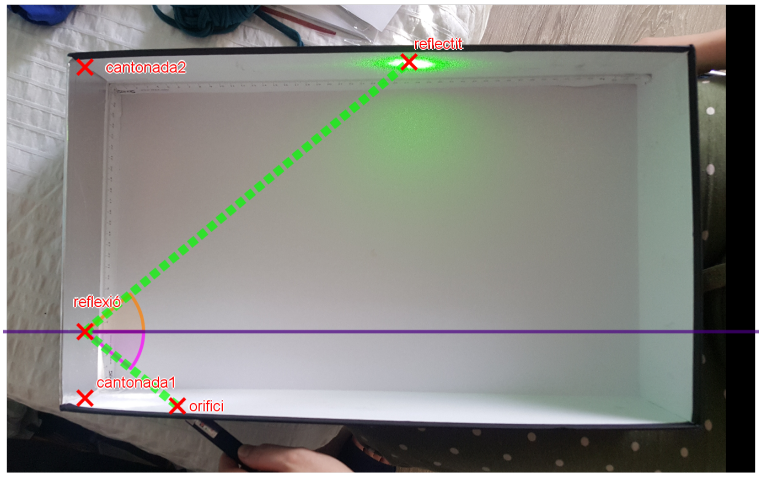


D_0 i f_0 representen les mesures constants corresponents, les quals dependran de la caixa que es prengui.

2. Fes una taula de valors f, d_1, d_2 i h que reculli totes les dades que has pres.

   Fixem-nos que $f = f_0$ tota l'estona, i que per calcular d_2 es farà el següent: $d_2 = D_0 - d_1$

   Fixa't en la següent figura:



3. Amb les dades que es tenen, quina raó trigonomètrica és fàcil de calcular dels angles α i β? Com la calcularies de cada angle en funció de f, d_1, d_2, D i h?

   El més eficient és calcular la tangent. En particular es tindrà:

$$\tan\alpha = \frac{d_1}{f} \qquad\qquad \tan\beta = \frac{d_2}{h}$$

4. Què representa la línia verda?

   La línia verda representa el camí que segueix la llum, ja que aquesta es propaga en línia recta per l'aire.

5. Expressa la longitud del camí verd en funció de f, d_1, d_2, D, h.

$$L = l_1 + l_2 = \sqrt{f^2 + d_1^2} + \sqrt{h^2 + d_2^2}$$

   o bé:

$$L = l_1 + l_2 = \sqrt{f^2 + d_1^2} + \sqrt{h^2 + (D - d_1)^2}$$

6. Ara expressa la longitud del camí verd en funció de d_1, d_2 i les raons trigonomètriques d'α i β que necessitis.

$$L = l_1 + l_2 = \frac{d_1}{\sin\alpha} + \frac{d_2}{\sin\beta}$$

7. En funció de la raó trigonomètrica que més et convingui, fes una taula de valors $\sin\alpha$, $\sin\beta$; $\cos\alpha$, $\cos\beta$; o $\tan\alpha$, $\tan\beta$, recollint les dades que has pres.

   (*)Extra: És possible fer les tres taules de valors? I en cas afirmatiu, t'hi atreveixes?

   La més fàcil de calcular és la $\tan\alpha$, $\tan\beta$, tot i que es poden fer totes elles, atès que $\sin\alpha = \frac{d_1}{\sqrt{f^2+d_1^2}}$ i $\cos\alpha = \frac{f}{\sqrt{f^2+d_1^2}}$ i anàlogament per β.

8. Representa les dades de la taula de valors de l'últim apartat.

9. Fes una regressió lineal gràficament i escriu l'equació de la recta.

   La recta expressarà la raó trigonomètrica de β *en funció de la raó trigonomètrica d'*α*. Per exemple, si s'ha fet amb la tangent:* $\tan\beta = a\tan\alpha + b$*. Com que, per la segona llei de la reflexió* $\alpha = \beta$*, i la tangent és monòtona en* $[0, \pi/2]$ *s'hauria d'obtenir aproximadament* $a = 1$ *i* $b = 0$

10. Comenta els resultats obtinguts.

    Aquí es preten que els alumnes facin una mica de resum del que han vist fins aquí i que vegin que els angles serien pràcticament iguals.

    En les següents qüestions es preten abordar aquestes qüestions mitjançant una base de dades molt més gran i fent ús d'un full de càlcul.

11. Afegeix les teves dades a la base de dades de tota la classe. Mitjançant un full de càlcul, feu un gràfic de dispersió amb totes les dades recol·lectades de la classe.

12. Afegeix una línia de tendència i escriu l'equació de la recta.

13. Comenta aquests nous resultats i compara'ls amb els teus.

14. El que has obtingut concorda amb la segona llei de la reflexió que afirma que: "L'angle d'incidència, format pel raig incident i la normal a la superfície reflectant, és igual a l'angle de reflexió, format pel raig reflectit i la normal ja mencionada."?

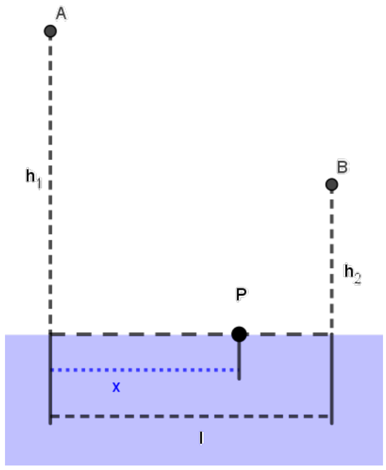
    En efecte concorda, ja que la tangent és monòtona en $[0, \pi/2]$ *i s'hauria d'obtenir* $\tan\beta = a\tan\alpha + b$ *amb* $a \approx 1$ *i* $b \approx 0$

A.4 Deducció de la segona llei de la reflexió

A.4.1 Fitxa de l'alumnat

L'objectiu d'aquesta fitxa és deduir la segona llei de la reflexió a partir del Principi de Fermat i dues de les seves conseqüències, la primera llei de la reflexió i el fet que en un medi homogeni i isòtrop els raigs segueixen trajectòries rectilínies. [11]

Considera la següent figura:



- Fes el dibuix del camí que segueix la llum per anar d'A a B passant per P.
- Expressa en termes d'$h_1,\ h_2,\ l$ i x la longitud del camí que has traçat a l'apartat anterior.

Pel Principi de Fermat se sap que el punt P en el qual es reflectarà la llum serà aquell que farà que el camí sigui mínim.

- Tracta $h_1,\ h_2$ i l com paràmetres, deriva la longitud que has expressat a l'apartat anterior respecte x i iguala la derivada a zero.

L'angle d'incidència θ_i és el format pel raig incident i la normal a la superfície reflectant. L'angle de reflexió θ_r és el format pel raig reflectit i la normal ja mencionada.

- Expressa $\sin(\theta_i)$ i $\sin(\theta_r)$ en termes d'$h_1,\ h_2,\ l$ i x

Com que la funció sinus és injectiva[12] en $[0, \frac{\pi}{2}]$ i $\theta_i, \theta_r \in [0, \frac{\pi}{2}]$, si es veu que $\sin(\theta_i) = \sin(\theta_r)$ ja s'haurà provat que $\theta_i = \theta_r$. Per tant, ara cal provar que $\sin(\theta_i) = \sin(\theta_r)$.

- Emprant els dos apartats anteriors, prova que $\sin(\theta_i) = \sin(\theta_r)$.

[11] Si en algun moment no veus les coses clares, et convido a fer un cop d'ull al següent geogebra: `https://www.geogebra.org/m/fVAvTP6h`

[12] $f(x)$ és una funció injectiva $\Leftrightarrow (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

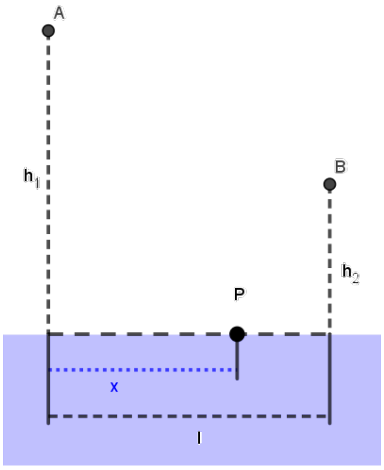
Enhorabona, en acabar has demostrat la segona llei de la reflexió en medis homogenis i isòtrops quan la superfície reflectant és plana.

Segona llei de la reflexió:
L'angle d'incidència, format pel raig incident i la normal a la superfície reflectant, és igual a l'angle de reflexió, format pel raig reflectit i la normal ja mencionada.

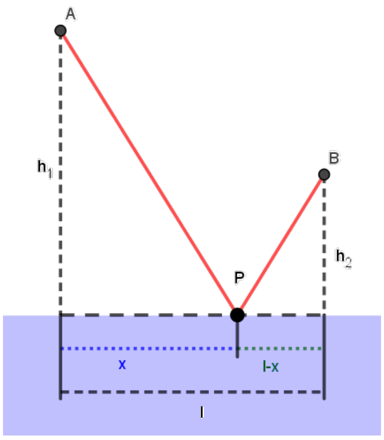
A.4.2 Fitxa del docent

L'objectiu d'aquesta fitxa és deduir la segona llei de la reflexió a partir del Principi de Fermat i dues de les seves conseqüències, la primera llei de la reflexió i el fet que en un medi homogeni i isòtrop els raigs segueixen trajectòries rectilínies.

Considera la següent figura:



- Fes el dibuix del camí que segueix la llum per anar d'A a B passant per P.



- Expressa en termes d'h_1, h_2, l i x la longitud del camí que has traçat a l'apartat anterior.

$$s(h_1, h_2, l, x) = \sqrt{x^2 + h_1^2} + \sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}$$

Pel Principi de Fermat se sap que el punt P en el qual es reflectarà la llum serà aquell que farà que el camí sigui mínim.

- Tracta $h_1,\ h_2$ i l com paràmetres, deriva la longitud que has expressat a l'apartat anterior respecte x i iguala la derivada a zero.

$$\frac{ds}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} + \frac{-(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}} = 0$$

L'angle d'incidència θ_i és el format pel raig incident i la normal a la superfície reflectant. L'angle de reflexió θ_r és el format pel raig reflectit i la normal ja mencionada.

- Expressa $\sin(\theta_i)$ i $\sin(\theta_r)$ en termes d'$h_1,\ h_2,\ l$ i x

$$\sin(\theta_i) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}}$$

$$\sin(\theta_r) = \frac{(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}}$$

Com que la funció sinus és injectiva en $[0, \frac{\pi}{2}]$ i $\theta_i, \theta_r \in [0, \frac{\pi}{2}]$, si es veu que $\sin(\theta_i) = \sin(\theta_r)$ ja s'haurà provat que $\theta_i = \theta_r$. Per tant, ara cal provar que $\sin(\theta_i) = \sin(\theta_r)$.

- Emprant els dos apartats anteriors, prova que $\sin(\theta_i) = \sin(\theta_r)$.

$$\frac{ds}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} + \frac{-(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} = \frac{(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}} \Rightarrow \sin\theta_i = \sin\theta_r \Rightarrow \theta_i = \theta_r$$

Segona llei de la reflexió:
L'angle d'incidència, format pel raig incident i la normal a la superfície reflectant, és igual a l'angle de reflexió, format pel raig reflectit i la normal ja mencionada.

Accés a aquest document i altres materials complementaris a: `https://www.geogebra.org/m/fVAvTP6h`

A.5 Què passa si es viola la primera llei de la reflexió?

A.5.1 Fitxa de l'alumnat

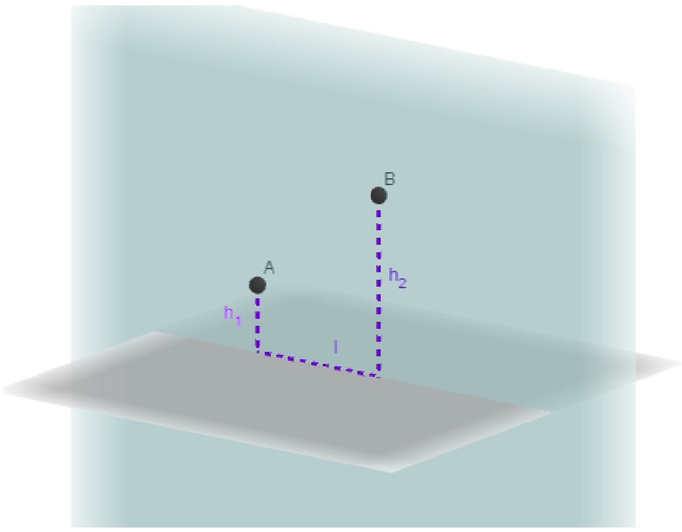
L'objectiu d'aquesta fitxa és fer un exercici de reflexió, imaginació i un repte matemàtic. Es planteja la següent situació. D'acord amb l'òptica geomètrica, hi ha dues lleis de la reflexió, i diuen tal com segueix:

Primera llei de la reflexió:
El raig incident, el raig reflectit i la normal es troben en el mateix pla.

Segona llei de la reflexió[13]:
L'angle d'incidència, format pel raig incident i la normal a la superfície reflectant, és igual a l'angle de reflexió, format pel raig reflectit i la normal ja mencionada.

És molt habitual que no se li doni la importància que es mereix a la primera llei, també anomenada *llei de conservació del pla d'incidència.* Així doncs, mitjançant aquesta activitat es pretèn veure com de necessària és aquesta llei. Imaginem un món on tan sols se satisfés que en medis homogenis i isòtrops la llum es propaga en línia recta i es verifica que l'angle d'incidència és igual a l'angle de reflexió.

Si en aquestes condicions es té un raig que parteix d'A, es reflecteix en una superfície, i arriba a B, es podria determinar quina és la trajectòria del raig?Es té un conjunt finit de possibilitats?[14]



1. Considerant que:
   - la regió $z \geq 0$ és un medi homogeni i isòtrop

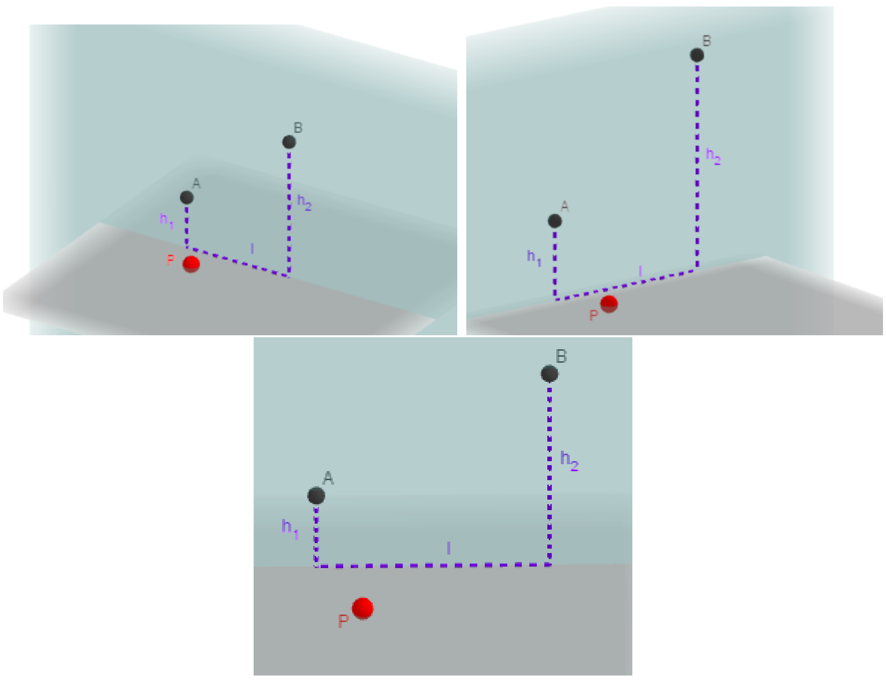
[13]Descartes va enunciar ambdues lleis en el segon discurs de la seva obra *Dioptrique*

[14]En el geogebra: `https://www.geogebra.org/m/t5ugjUUj` pots veure que existeix més d'una possibilitat. Són aquests punts els únics que satisfen les condicions? Amb la fitxa ho esbrinaràs.

- el pla en color gris és una superfície reflectant i vé determinat per l'expressió $\pi_g : z = 0$
- el pla en color blau, que conté els punts A i B i és perpendicular al pla gris vé donat per $\pi_b : y = 0$
- la distància entre A i la projecció ortogonal d'A sobre π_g és h_1
- la distància entre B i la projecció ortogonal de B sobre π_g és h_2
- la distància entre les projeccions ortogonals d'A i B sobre π_g és l
- la projecció ortogonal d'A sobre π_g és $A_{PO} = (0, 0, 0)$

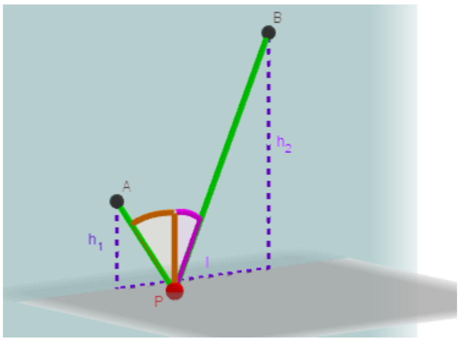
Determina les coordenades dels punts A, B i la projecció ortogonal de B sobre π_g, el qual es denotarà per B_{PO}, en funció dels paràmetres h_1, h_2 i l.

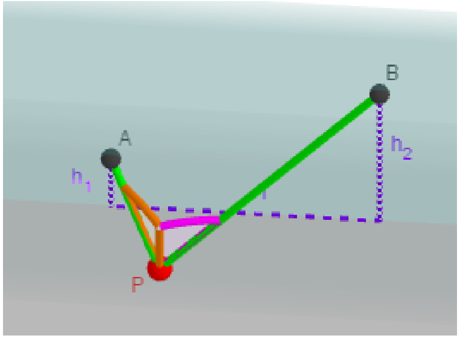
2. Si $P = (x, y, z)$ pertany a π_g, què s'ha de satisfer? A continuació tens diferents vistes de la mateixa situació.



3. En el món que hem imaginat, és possible que la llum vagi del punt A al punt B passant per P? Què s'hauria de satisfer per tal que fos possible[15]?
4. Quin recorregut faria la llum? (N'hi ha prou amb expressar-ho amb paraules i fer un dibuix)
5. Quina és la distància de P a A_{PO}?
6. Quina és la distància de P a B_{PO}?
7. Les següents figures mostren la mateixa situació des de diferents perspectives. Denotem per α l'angle de color taronja i per β el de color rosa. Què són aquests angles?
8. Expressa la tangent d'α en termes de x, y, h_1, h_2 i l.
9. Expressa la tangent de β en termes de x, y, h_1, h_2 i l.
10. D'acord amb la segona llei de la reflexió, què s'ha de satisfer?

[15]Recorda quines lleis se satisfan en el món que estem imaginant





11. Tenint en consideració que si dos angles són iguals, aleshores totes les seves raons trigonomètriques coincideixen, i amb tota la informació recopilada fins ara, dedueix que:

$$x^2(h_1^2 - h_2^2) - 2xlh_1^2 + y^2(h_1^2 - h_2^2) + h_1^2 l^2 = 0$$

12. Determina els x i y que satisfan la condició

$$x^2(h_1^2 - h_2^2) - 2xlh_1^2 + y^2(h_1^2 - h_2^2) + h_1^2 l^2 = 0$$

si $h_1 = h_2$. Interpreta els resultats.

13. Si $h_1 \neq h_2$, aleshores $h_1^2 - h_2^2 \neq 0$, per tant es pot dividir per aquest factor i s'obté:

$$x^2 - 2x\frac{lh_1^2}{h_1^2 - h_2^2} + y^2 = -\frac{h_1^2 l^2}{h_1^2 - h_2^2}$$

Ara, completant quadrats, s'obté:

$$x^2 - 2x\frac{lh_1^2}{h_1^2 - h_2^2} + \left(\frac{lh_1^2}{h_1^2 - h_2^2}\right)^2 + y^2 = -\frac{h_1^2 l^2}{h_1^2 - h_2^2} + \left(\frac{lh_1^2}{h_1^2 - h_2^2}\right)^2$$

Simplifica l'última expressió fins a obtenir:

$$\left(x - \frac{lh_1^2}{h_1^2 - h_2^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{h_1 h_2 l}{h_1^2 - h_2^2}\right)^2$$

14. A què correspon aquesta última expressió?

A.5.2 Fitxa del docent

L'objectiu d'aquesta fitxa és fer un exercici de reflexió, imaginació i un repte matemàtic. Es planteja la següent situació. D'acord amb l'òptica geomètrica, hi ha dues lleis de la reflexió, i diuen tal com segueix:

Primera llei de la reflexió:
El raig incident, el raig reflectit i la normal es troben en el mateix pla.

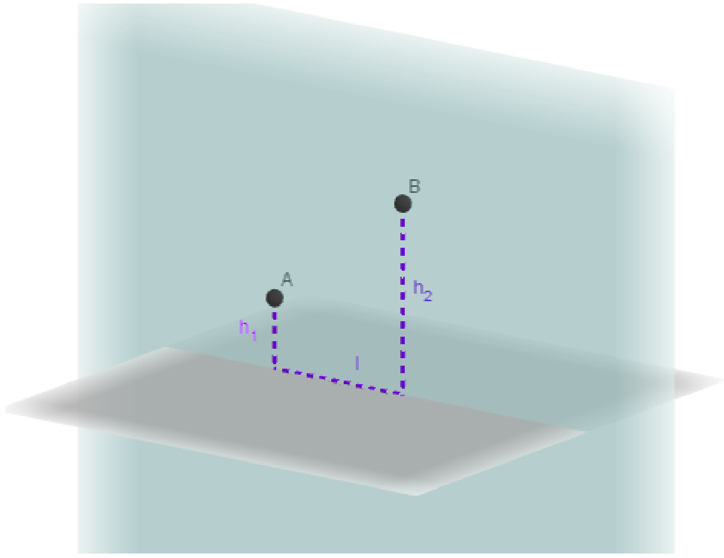
Segona llei de la reflexió[16]:

[16] Descartes va enunciar ambdues lleis en el segon discurs de la seva obra *Dioptrique*

L'angle d'incidència, format pel raig incident i la normal a la superfície reflectant, és igual a l'angle de reflexió, format pel raig reflectit i la normal ja mencionada.

És molt habitual que no se li doni la importància que es mereix a la primera llei, també anomenada *llei de conservació del pla d'incidència.* Així doncs, mitjançant aquesta activitat es pretèn veure com de necessària és aquesta llei. Imaginem un món on tan sols se satisfés que en medis homogenis i isòtrops la llum es propaga en línia recta i es verifica que l'angle d'incidència és igual a l'angle de reflexió.

Si en aquestes condicions es té un raig que parteix d'A, es reflecteix en una superfície, i arriba a B, es podria determinar quina és la trajectòria del raig?Es té un conjunt finit de possibilitats?[17]



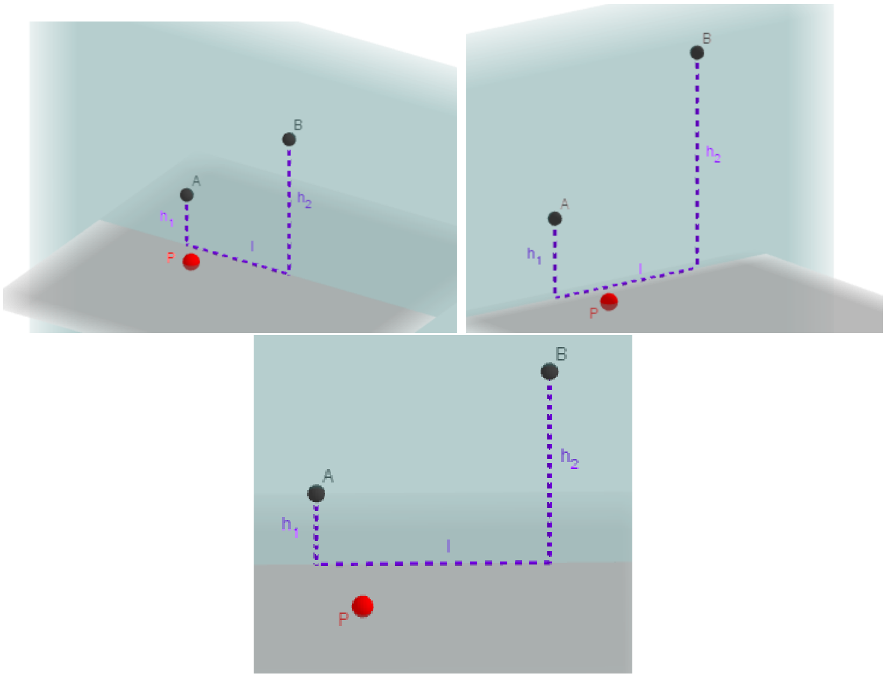
1. Considerant que:
   - la regió $z \geq 0$ és un medi homogeni i isòtrop
   - el pla en color gris és una superfície reflectant i vé determinat per l'expressió $\pi_g : z = 0$
   - el pla en color blau, que conté els punts A i B i és perpendicular al pla gris vé donat per $\pi_b : y = 0$
   - la distància entre A i la projecció ortogonal d'A sobre π_g és h_1
   - la distància entre B i la projecció ortogonal de B sobre π_g és h_2
   - la distància entre les projeccions ortogonals d'A i B sobre π_g és l
   - la projecció ortogonal d'A sobre π_g és $A_{PO} = (0, 0, 0)$

   Determina les coordenades dels punts A, B i la projecció ortogonal de B sobre π_g, el qual es denotarà per B_{PO}, en funció dels paràmetres h_1, h_2 i l.

   $A = (0, 0, h_1)$; $B = (l, 0, h_2)$; $B_{OP} = (l, 0, 0)$;

[17] Es comprova amb aquest Geogebra que hi ha un conjunt infinit de possibilitats en aquest Geogebra: `https://www.geogebra.org/m/t5ugjUUj`

2. Si $P=(x,y,z)$ pertany a π_g, què s'ha de satisfer? A continuació tens diferents vistes de la mateixa situació.



Com que $\pi_g : z=0$, cal que $z=0$. Per tant $P=(x,y,0)$

3. En el món que hem imaginat, és possible que la llum vagi del punt A al punt B passant per P? Què s'hauria de satisfer per tal que fos possible[18]?

   Aniria d'A a P en línia recta, ja que la regió $z \geq 0$ és un medi homogeni i isòtrop. En P es produiria el fenomen de la reflexió i s'hauria de satisfer la segona llei de la reflexió. De P aniria cap a B en línia recta, pel mateix argument emprat abans.

4. Quin recorregut faria la llum? (N'hi ha prou amb expressar-ho amb paraules i fer un dibuix)

   Aniria d'A a P en línia recta i després de P a B en línia recta:

5. Quina és la distància de P a A_{PO}?

$$d(P, A_{PO}) = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(0-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

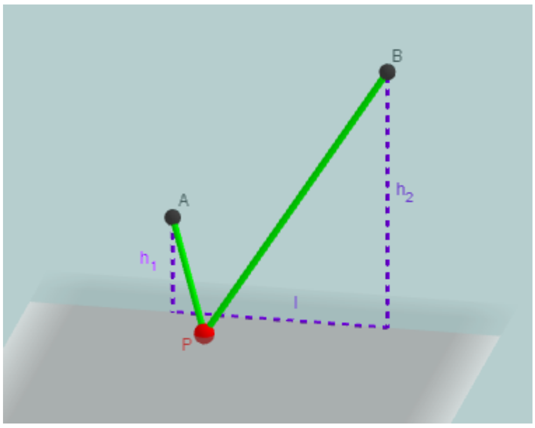
6. Quina és la distància de P a B_{PO}?

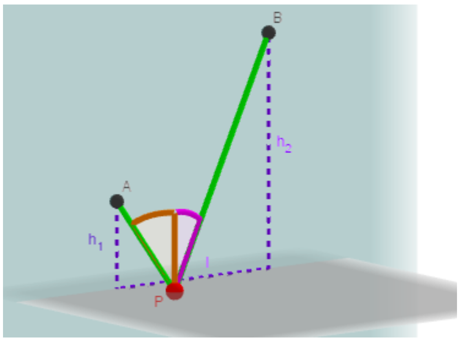
$$d(P, B_{PO}) = \sqrt{(l-x)^2+(0-y)^2+(0-0)^2} = \sqrt{(l-x)^2+y^2}$$

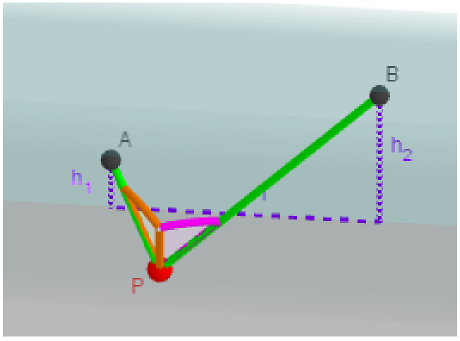
7. Les següents figures mostren la mateixa situació des de diferents perspectives. Denotem per α l'angle de color taronja i per β el de color rosa. Què són aquests angles?

   D'una banda, l'angle de color taronja és l'angle que forma el raig incident amb la normal a la superfície reflectant. D'altra banda, l'angle de color rosa és l'angle que forma el raig reflectit amb la normal a la superfície reflectant.

[18] Recorda quines lleis se satisfan en el món que estem imaginant







8. Expressa la tangent d'α en termes de x, y, h_1, h_2 i l.

$$\tan\alpha = \frac{h_1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

9. Expressa la tangent d'β en termes de x, y, h_1, h_2 i l.

$$\tan\beta = \frac{h_2}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}}$$

10. D'acord amb la segona llei de la reflexió, què s'ha de satisfer?

    S'ha de satisfer que l'angle d'incidència coincideixi amb l'angle de reflexió, és a dir, que $\alpha = \beta$

11. Tenint en consideració que si dos angles són iguals, aleshores totes les seves raons trigonomètriques coincideixen, i amb tota la informació recopilada fins ara, dedueix que:

$$x^2(h_1^2 - h_2^2) - 2xlh_1^2 + y^2(h_1^2 - h_2^2) + h_1^2 l^2 = 0$$

$$\alpha = \beta \Rightarrow \tan\alpha = \tan\beta \Rightarrow \frac{h_1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{h_2}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h_1^2}{x^2+y^2} = \frac{h_2^2}{(l-x)^2+y^2} \Rightarrow h_1^2[(l-x)^2+y^2] = h_2^2(x^2+y^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(h_1^2 - h_2^2) - 2xlh_1^2 + y^2(h_1^2 - h_2^2) + h_1^2 l^2 = 0$$

12. Determina els x i y que satisfan la condició

$$x^2(h_1^2 - h_2^2) - 2xlh_1^2 + y^2(h_1^2 - h_2^2) + h_1^2 l^2 = 0$$

si $h_1 = h_2$. Interpreta els resultats.

Si $h_1 = h_2$, aleshores s'anul·len els termes multiplicats per $(h_1^2 - h_2^2)$ i s'obté:

$$2xlh_1^2 = h_1^2 l^2$$

I com que $l \neq 0$ i $h_1 \neq 0$ per hipòtesi, això correspon a la recta $x = \frac{l}{2}$. Això correspon a la recta $x = \frac{l}{2}$, és a dir, que es produiria la reflexió en qualsevol punt del pla π_g que equidista de A i B.

13. Si $h_1 \neq h_2$, aleshores $h_1^2 - h_2^2 \neq 0$, per tant es pot dividir per aquest factor i s'obté:

$$x^2 - 2x\frac{lh_1^2}{h_1^2 - h_2^2} + y^2 = -\frac{h_1^2 l^2}{h_1^2 - h_2^2}$$

Ara, completant quadrats, s'obté:

$$x^2 - 2x\frac{lh_1^2}{h_1^2 - h_2^2} + \left(\frac{lh_1^2}{h_1^2 - h_2^2}\right)^2 + y^2 = -\frac{h_1^2 l^2}{h_1^2 - h_2^2} + \left(\frac{lh_1^2}{h_1^2 - h_2^2}\right)^2$$

Simplifica l'última expressió fins a obtenir:

$$\left(x - \frac{lh_1^2}{h_1^2 - h_2^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{h_1 h_2 l}{h_1^2 - h_2^2}\right)^2$$

L'última expressió és equivalent a

$$\left(x - \frac{lh_1^2}{h_1^2 - h_2^2}\right)^2 + y^2 = \frac{h_1^2 l^2}{h_1^2 - h_2^2}\left(\frac{h_1^2}{h_1^2 - h_2^2} - 1\right)$$

I simplificant una mica més el segon membre:

$$\frac{h_1^2 l^2}{h_1^2 - h_2^2}\left(\frac{h_1^2 - (h_1^2 - h_2^2)}{h_1^2 - h_2^2}\right) = \frac{h_1^2 l^2}{h_1^2 - h_2^2}\left(\frac{h_2^2}{h_1^2 - h_2^2}\right) = \left(\frac{h_1 h_2 l}{h_1^2 - h_2^2}\right)^2$$

I ja s'obté:

$$\left(x - \frac{lh_1^2}{h_1^2 - h_2^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{h_1 h_2 l}{h_1^2 - h_2^2}\right)^2$$

14. A què correspon aquesta última expressió?

Aquesta expressió correspon a una circumferència centrada en $\left(\frac{lh_1^2}{h_1^2 - h_2^2}, 0\right)$ amb radi $\frac{h_1 h_2 l}{h_1^2 - h_2^2}$

A.6 Aplicant el mètode científic: El problema de la Il·luminació

A.6.1 Fitxa de l'alumnat

MODEL A

Teniu dos models:

Cambra rectangular:

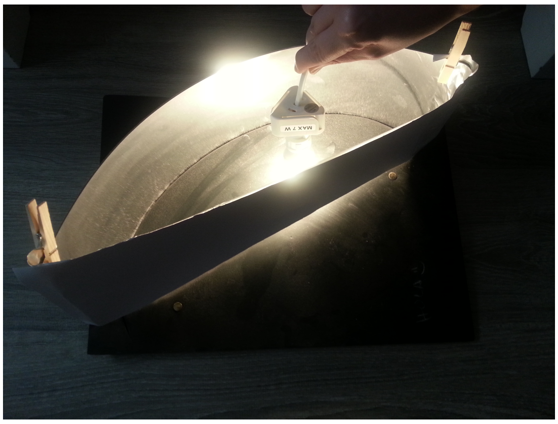
- Trieu una ubicació des d'on il·luminar la cambra. Es pot il·luminar la cambra en la seva totalitat, o queden regions fosques?
- Modifiqueu la posició triada del llum i responeu a la mateixa pregunta.
- Després de repetir la pregunta anterior un mínim de 5 cops, considereu que és significatiu on col·loqueu el llum?
- Modifiqueu la cambra.
- EXTRA: Podeu mirar les trajectòries que fa un sol raig de llum emprant el làser.

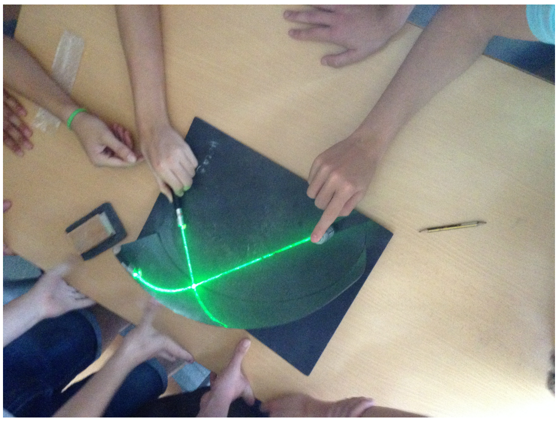
Cambra arrodonida:

- Trieu una ubicació des d'on il·luminar la cambra. Es pot il·luminar la cambra en la seva totalitat, o queden regions fosques?
- Modifiqueu la posició triada del llum i responeu a la mateixa pregunta.
- Després de repetir la pregunta anterior un mínim de 5 cops, considereu que és significatiu on col·loqueu el llum?
- Modifiqueu la cambra.
- EXTRA: Podeu mirar les trajectòries que fa un sol raig de llum emprant el làser.

MODEL B

Cambra semiel·líptica:

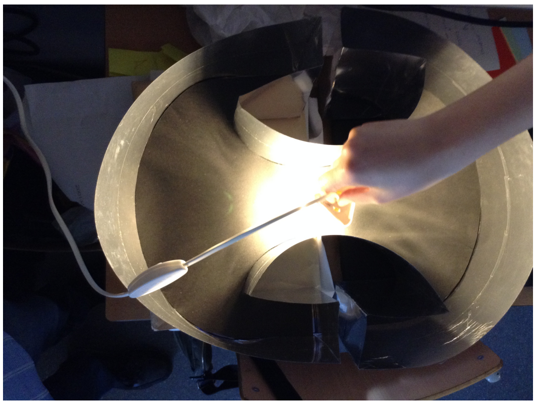




- Trieu una ubicació des d'on il·luminar la cambra. Es pot il·luminar la cambra en la seva totalitat, o queden regions fosques?
- Modifiqueu la posició triada del llum i responeu a la mateixa pregunta.
- Després de repetir la pregunta anterior un mínim de 5 cops, considereu que és significatiu on col·loqueu el llum?
- Estudieu les trajectòries que fa un sol raig de llum emprant el làser, si:
  - El raig surt d'un dels focus.
  - El raig surt entre els focus.
  - El raig surt més enllà dels focus.

MODEL C:

Cambra de Penrose:



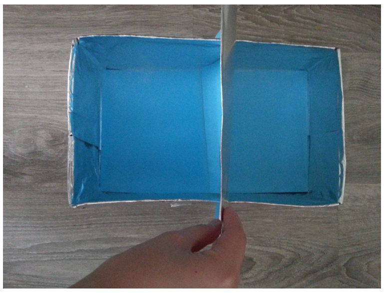
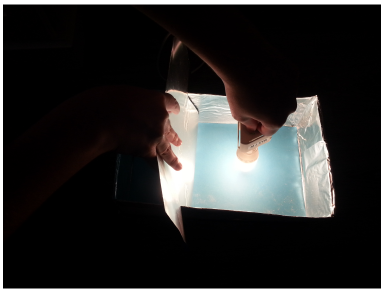
- Trieu una ubicació des d'on il·luminar la cambra. Es pot il·luminar la cambra en la seva totalitat, o queden regions fosques?
- Modifiqueu la posició triada del llum i responeu a la mateixa pregunta.
- Després de repetir la pregunta anterior un mínim de 5 cops, considereu que és significatiu on col·loqueu el llum?
- Estudieu quines regions s'il·luminen i quan.

A.6.2 Fitxa del docent

MODEL A

Teniu dos models:

Cambra rectangular:

- Trieu una ubicació des d'on il·luminar la cambra. Es pot il·luminar la cambra en la seva totalitat, o queden regions fosques?
  La cambra queda tota il·luminada.
- Modifiqueu la posició triada del llum i responeu a la mateixa pregunta.
  La cambra queda tota il·luminada.
- Després de repetir la pregunta anterior un mínim de 5 cops, considereu que és significatiu on col·loqueu el llum?
  No és significatiu. De fet, ni tan sols el fet que les parets siguin reflectants és significatiu, ja que amb il·luminació directa ja es pot il·luminar la cambra en la seva totalitat per ser convexa.
- Modifiqueu la cambra.
  Aquí es dóna llibertat als alumnes per fomentar la seva creativitat i que facin exploracions.
- EXTRA: Podeu mirar les trajectòries que fa un sol raig de llum emprant el làser.

Cambra arrodonida:



- Trieu una ubicació des d'on il·luminar la cambra. Es pot il·luminar la cambra en la seva totalitat, o queden regions fosques?
  La cambra queda tota il·luminada.
- Modifiqueu la posició triada del llum i responeu a la mateixa pregunta.
  La cambra queda tota il·luminada.

- Després de repetir la pregunta anterior un mínim de 5 cops, considereu que és significatiu on col·loqueu el llum?

  No és significatiu. De fet, ni tan sols el fet que les parets siguin reflectants és significatiu, ja que amb il·luminació directa ja es pot il·luminar la cambra en la seva totalitat per ser convexa.

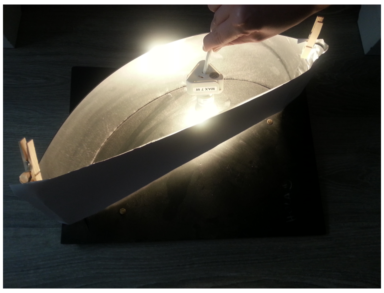
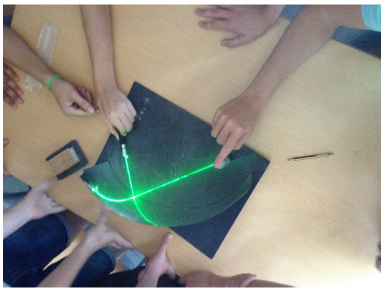
- Modifiqueu la cambra.

  Aquí es dóna llibertat als alumnes per fomentar la seva creativitat i que facin exploracions.

- EXTRA: Podeu mirar les trajectòries que fa un sol raig de llum emprant el làser.

MODEL B

Cambra semiel·líptica:

- Trieu una ubicació des d'on il·luminar la cambra. Es pot il·luminar la cambra en la seva totalitat, o queden regions fosques?

  La cambra queda tota il·luminada.

- Modifiqueu la posició triada del llum i responeu a la mateixa pregunta.

  La cambra queda tota il·luminada.

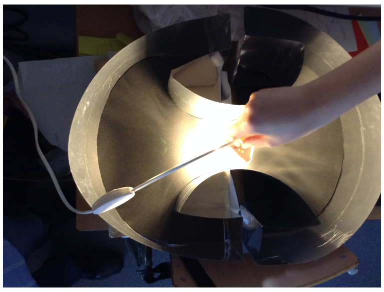
- Després de repetir la pregunta anterior un mínim de 5 cops, considereu que és significatiu on col·loqueu el llum?

  No és significatiu. De fet, ni tan sols el fet que les parets siguin reflectants és significatiu, ja que amb il·luminació directa ja es pot il·luminar la cambra en la seva totalitat per ser convexa.

- Estudieu les trajectòries que fa un sol raig de llum emprant el làser, si:
  - El raig surt d'un dels focus.
    Arribarà a l'altre focus.
  - El raig surt entre els focus.
    El raig retornarà a la regió entre focus.
  - El raig surt més enllà dels focus.
    El raig retornarà a la regió més enllà dels focus.

MODEL C:

Cambra de Penrose:



- Trieu una ubicació des d'on il·luminar la cambra. Es pot il·luminar la cambra en la seva totalitat, o queden regions fosques?

  Quedaràn regions fosques. Pot ser interessant que facin dibuixos o esquemes o fotografies on es plasmin les observacions.

- Modifiqueu la posició triada del llum i responeu a la mateixa pregunta.

  Quedaràn regions fosques. Pot ser interessant que facin dibuixos o esquemes o fotografies on es plasmin les observacions.

- Després de repetir la pregunta anterior un mínim de 5 cops, considereu que és significatiu on col·loqueu el llum?

  És significatiu on es col·loca el llum perquè en funció de la posició unes regions o altres es queden a les fosques. Tot i que sempre, indepentment d'on es col·loqui, hi ha regions que no s'il·luminen.

- Estudieu quines regions s'il·luminen i quan.

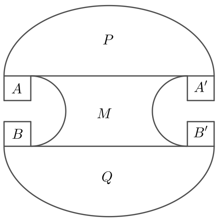


Figura 38: Regions cambra

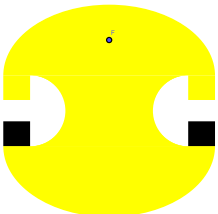


Figura 39: $F \in P$

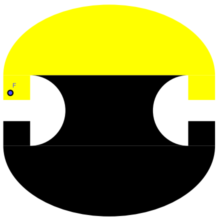


Figura 40: $F \in A$

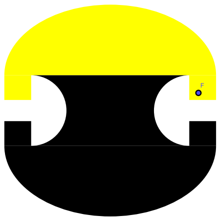


Figura 41: $F \in A'$

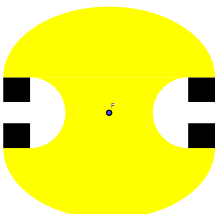


Figura 42: $F \in M$

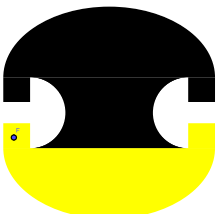


Figura 43: $F \in B$

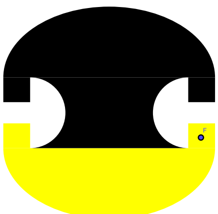


Figura 44: $F \in B'$

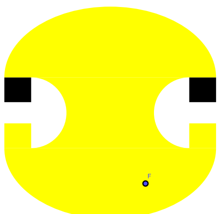


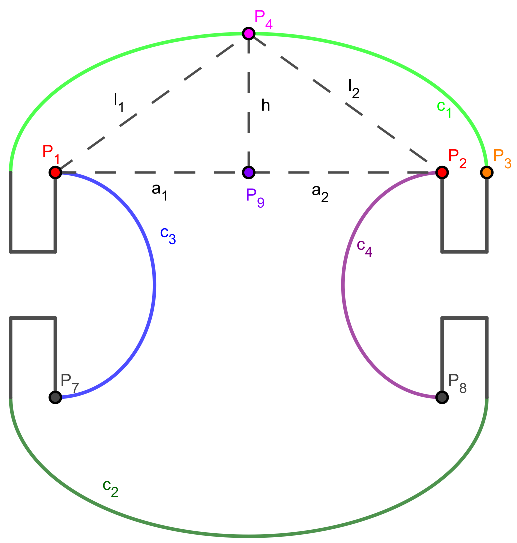
Figura 45: $F \in Q$

A.7 Anàlisi de la cambra de Penrose

A.7.1 Fitxa de l'alumnat

Tot seguit hi ha una sèrie de preguntes sobre un Geogebra que es pot trobar al següent link: `https://www.geogebra.org/m/rYFaFywy`. Llegeix les qüestions amb atenció, experimenta amb el Geogebra i elabora un redactat tot responent les preguntes i incloent-hi les teves observacions i conclusions:

1. Reprodueix la figura amb les peces físiques de què disposes, considerant que si sobreposes blanc al blau, aquella regió no pertany a la cambra.
2. La figura que es mostra té simetria axial? En cas afirmatiu, digues quins són els eixos de simetria. (Extra: descriu com trobaríes gràficament els eixos de simetria).
3. Quina figura geomètrica és la corba verd clar, c_1?
   Indicació: Es tracta d'una cònica.
4. Si es tracés un cercle c' centrat a P_4 i amb radi P_9P_3, el punt P_1 quedaria a l'interior de c', a l'exterior, o a la frontera?
5. Mesura la distància que hi ha del punt P_1 al P_4 i de P_9 al punt P_3 i compara-les.
6. La resposta a les dues preguntes anteriors canvien si varien els paràmetres a, b, c, d i e? I a què es deu?
7. (Intent de versió més intuïtiva:) Si, tal com es mostra a la següent figura, anomenem:
   - h el segment que uneix P_4 i P_9.
   - a_1 el segment que uneix P_1 i P_9.
   - a_2 el segment que uneix P_2 i P_9.
   - l_1 el segment que uneix P_1 i P_4.
   - l_2 el segment que uneix P_2 i P_4.



Respon les següents qüestions:

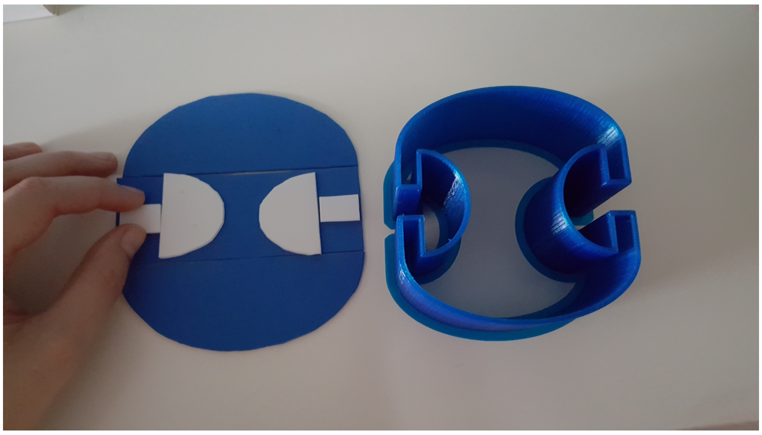
- Sabent que P_9 és el punt mig de P_1 i P_2, dedueix que $a_1 = a_2$.
  Indicació: Pots considerar que les coordenades dels punts són: $P_9 = (0, r_2)$, $P_1 = (-a_1, r_2)$ *i* $P_2 = (a_2, r_2)$.
- Sabent que el segment h és perpendicular al segment que uneix P_1 amb P_2, i tenint en compte l'apartat anterior, prova que $l_1 = l_2$.
- Quina longitud té el camí més curt que va de P_1 a P_2 i passa per P_4?
- Sigui a el segment que uneix O amb P_3. Quina és la longitud del camí que va de P_1 a P_2 i passa per P_3?
- Sabent que la longitud del camí més curt que va de P_1 a P_2 i passa per un punt de qualsevol de c_1 sempre és la mateixa, què pots concloure?

8. Els punts vermells, P_1 i P_2, tenen un nom singular respecte la corba de color verd clar, c_1. Quin nom reben? Quines propietats tenen?
9. Quina figura geomètrica és la corba blava, c_3?
   Indicació: Es tracta d'una cònica.
10. Què succeeix si els paràmetres d i e tenen el mateix valor.
    Indicació: Fixa't en la naturalesa de la corba blava.
11. Juga amb els paràmetres a, b, c, d i e canviant el seu valor i indica què varia en modificar cadascun d'ells.
12. Explica què determinen els paràmetres a, b, c, d i e.
13. Com podries trobar els focus de la corba blava, c_3?

A.7.2 Fitxa del docent

Tot seguit hi ha una sèrie de preguntes sobre un Geogebra que es pot trobar al següent link: `https://www.geogebra.org/m/rYFaFywy`.

1. Reprodueix la figura amb les peces físiques de què disposes, considerant que si sobreposes blanc al blau, aquella regió no pertany a la cambra.



2. La figura que es mostra té simetria axial? En cas afirmatiu, digues quins són els eixos de simetria. (Extra: descriu com trobaríes gràficament els eixos de simetria).

   Hi ha dos eixos de simetria. Un és l'eix d'ordenades. L'altre és paral·lel a l'eix d'abscisses i passa pel punt mig entre P_3 i P_5. De fet, és la mediatriu del segment P_3P_5.

3. Quina figura geomètrica és la corba verd clar, c_1?
   Indicació: Es tracta d'una cònica.

   Es tracta d'una semiel·lipse.

4. Si es traça un cercle c' centrat a P_4 i amb radi P_9P_3, el punt P_1 quedarà a l'interior de c', a l'exterior, o a la frontera?

   P_1 quedarà justament a la frontera de c'.

5. Mesura la distància que hi ha del punt P_1 al P_4 i de P_9, al punt P_3 i compara-les.

   La distància serà la mateixa: $P_1P_4 = P_9P_3$, com es pot deduir del fet que P_1 queda a la frontera de $c' = B(P_4, P_9P_3)$, i que la frontera de c' és $\partial c' = \{z \in \mathbb{R}^2 : ||z - P_4|| = P_9P_3\}$

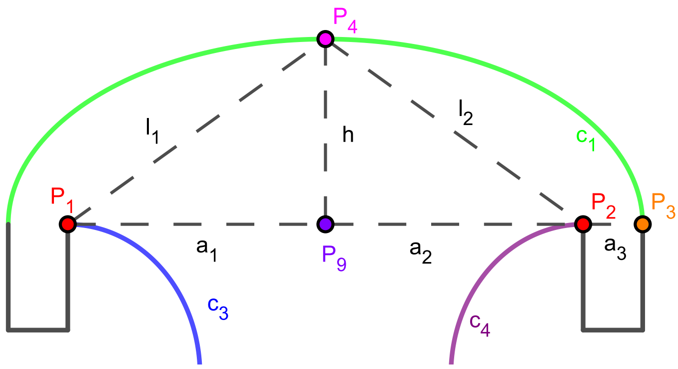
6. La resposta a les dues preguntes anteriors canvien si varien els paràmetres a, b, c, d i e? I a què es deu?

   La resposta a ambdues preguntes seguirà sent la mateixa i això es deu al següent:

P_1 i P_2 són els focus de la semiel·lipse $c_1 = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq r_2, ||P_1 - z|| + ||z - P_2|| = k\}$ per un k en particular. Per tant, es té que:

$$\forall z \in c_1, ||P_1 - z|| + ||z - P_2|| = k$$

En particular, això és cert pels punts P_4 i P_3. Mirem la següent figura amb atenció:



D'una banda, estudiem P_4. D'entrada: $||P_1 - P_4|| + ||P_4 - P_2|| = k$. A més, com hem comentat a la primera pregunta, aquesta figura és simètrica respecte l'eix d'ordenades, i com que P_4 està sobre l'eix d'ordenades,

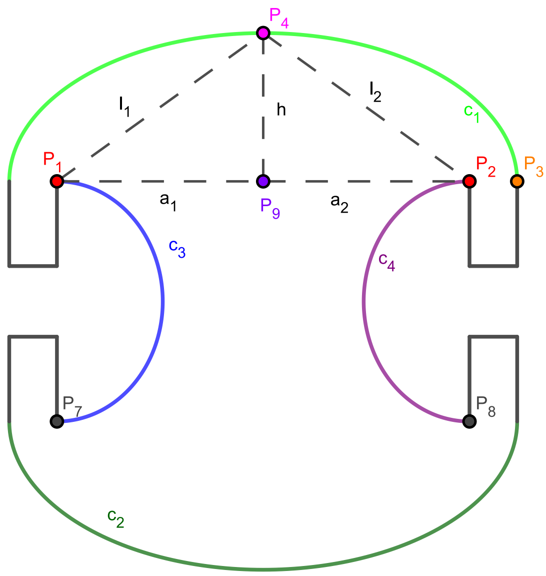
$$||P_1 - P_4|| = ||P_4 - P_2|| = l = P_1P_4$$

Així doncs es té que $k = ||P_1 - P_4|| + ||P_4 - P_2|| = l + l = 2l = 2P_1P_4$.
D'altra banda, estudiem P_3. És clar que: $||P_1 - P_3|| = P_9P_3 + t$ i $||P_3 - P_2|| = P_9P_3 - t$. En conseqüència: $||P_1 - P_3|| + ||P_3 - P_2|| = 2P_9P_3 = k$.
Consegüentment,

$$2P_1P_4 = k = 2P_9P_3 \Rightarrow P_1P_4 = P_9P_3$$

Fins aquí hem provat que les distàncies són sempre les mateixes. Ara, veure que $P_1 \in \partial c'$ és immediat, atès que $P_1P_4 = ||P_1 - P_4|| = P_9P_3$ i $\partial c' = \{z \in \mathbb{R}^2 : ||z - P_4|| = P_9P_3\}$.

7. (Intent de versió més intuïtiva:) Si, tal com es mostra a la següent figura, anomenem:
   - h el segment que uneix P_4 i P_9.
   - a_1 el segment que uneix P_1 i P_9.
   - a_2 el segment que uneix P_2 i P_9.
   - l_1 el segment que uneix P_1 i P_4.
   - l_2 el segment que uneix P_2 i P_4.



Respon les següents qüestions:

- Sabent que P_9 és el punt mig de P_1 i P_2, dedueix que $a_1 = a_2$.
  Indicació: Pots considerar que les coordenades dels punts són: $P_9 = (0, r_2)$, $P_1 = (-a_1, r_2)$ i $P_2 = (a_2, r_2)$.
- Sabent que el segment h és perpendicular al segment que uneix P_1 amb P_2, i tenint en compte l'apartat anterior, prova que $l_1 = l_2$.
- Quina longitud té el camí més curt que va de P_1 a P_2 i passa per P_4?
- Sigui a el segment que uneix O amb P_3. Quina és la longitud del camí que va de P_1 a P_2 i passa per P_3?
- Sabent que la longitud del camí més curt que va de P_1 a P_2 i passa per un punt de qualsevol de c_1 sempre és la mateixa, què pots concloure?

8. Els punts vermells, P_1 i P_2, tenen un nom singular respecte la corba de color verd clar, c_1. Quin nom reben? Quines propietats tenen?

   P_1 i P_2 són els focus de c_1 i satisfan la propietat que $\forall z \in c_1, ||P_1 - z|| + ||z - P_2|| = k$, on $k > 0$ és una consntant.
9. Quina figura geomètrica és la corba blava, c_3?
   Indicació: Es tracta d'una cònica.

   c_3 és una semiel·lipse.
10. Què succeeix si els paràmetres d i e tenen el mateix valor.
    Indicació: Fixa't en la naturalesa de la corba blava.

    En aquest cas les corbes c_3 i c_4 són semicircumferències.
11. Juga amb els paràmetres a, b, c, d i e canviant el seu valor i indica què varia en modificar cadascun d'ells.
    - *En modificar R_1, varia el semieix major de les semiel·lipses verdes c_1 i c_2, com també la posició dels focus P_1 i P_2. (Com també els focus de c_2 que no hem anomenat).*

- *En modificar R_2, varia el semieix menor de les semiel·lipses verdes c_1 i c_2, com també la posició dels focus P_1 i P_2. (Com també els focus de c_2 que no hem anomenat). També pot variar el semieix major de c_1 i c_2 per tal de seguir sent el semieix major.*
- *En modificar h, varia la separació.*
- *En modificar r_1, varia el semieix horitzontal de les semiel·lipses blaves c_3 i c_4.*
- *En modificar r_2, varia el semieix vertical de les semiel·lipses blaves c_3 i c_4.*

12. Explica què determinen els paràmetres R_1, R_2, h, r_1 i r_2.
    - *R_1 determina el semieix major de les semiel·lipses verdes c_1 i c_2. En conseqüència defineix, un cop fixades la resta de variables, la posició dels focus.*
    - *R_2 determina el semieix menor de les semiel·lipses verdes c_1 i c_2. En conseqüència defineix, un cop fixades la resta de variables, la posició dels focus. A més, esdevé una cota inferior del valor que pot assolir el semieix major.*
    - *h determina la separació.*
    - *r_1 determina el semieix horitzontal de les semiel·lipses blaves c_3 i c_4.*
    - *r_2 determina el semieix vertical de les semiel·lipses blaves c_3 i c_4.*
13. Com podries trobar els focus de la corba blava, c_3?

    El procediment depèn de quin sigui el semieix major de la semiel·lipse blava c_3. Posem per cas que el vertical és el semieix major. En aquest cas caldrà trobar els punts de l'eix vertical, que es troben sobre la recta r_3, que disten d de P_6, on d recordem que és la longitud del semieix major sota la hipòtesi que hem fet. Podem fer-ho dibuixant una circumferència centrada a P_6 de radi d. Les interseccions amb r_3 són els focus: P_7 i P_8.

Accés a aquest document i altres materials complementaris a: `https://www.geogebra.org/m/g6Z9KWer`